

PERIODICO
—
DI
—
MATEMATICA

—
PER

L'INSEGNAMENTO SECONDARIO

DIRETTO

DA

DAVIDE BESSO
PROFESSORE DI CALCOLO INFINITESIMALE
NELLA R. UNIVERSITÀ DI MODENA

AURELIO LUGLI
PROFESSORE DI MATEMATICA
NEL R. ISTITUTO TECNICO DI ROMA

— — — — —
ANNO V.

1890
— — — — —

ROMA
TIPOGRAFIA ELZEVIKIANA
nel Ministero delle Finanze

1890

70893E

24

INDICE

	PAG.
G. RIBONI. — Contributo allo studio del tetraedro	1
T. FUORTES. — Sul numero delle divisioni nella ricerca del massimo comune divisore di due numeri	9
D. BESSO. — Sull'eguaglianza $a^b = b^a$ con a e b interi e positivi . .	12
A. LUGLI. — Un problema d'aritmetica	15, 35
F. GIUDICE. — Sviluppo di $\text{arc. sen } x$. Una formola di trasformazione per $\text{arc. tang } x$	33
S. RINDI. — Una osservazione relativa ad alcune quistioni di probabilità	41
D. GAMBIOLO. — Alcune formole relative al triangolo	42
D. VALERI. — Sull'insegnamento della matematica nelle Scuole classiche	46, 65
G. FRATTINI. — Intorno al significato di alcune quistioni di probabilità	72
F. GIUDICE. — Sopra una quistione di probabilità trattata recentemente dal Prof. Murer	73
G. GARDENGHI. — Delle pensioni vitalizie nel caso che le somme versate dagli assicurati siano da restituirsi, senza interessi, agli eredi . .	97
I. AMALDI. — Dimostrazione della periodicità nella espressione in serie infinite delle grandezze razionali	102
S. CATANIA. — Teoremi sui triangoli isobaricentrici	106
G. DELITALA. — Dimostrazione della formola che dà il volume d'un tetraedro in funzione degli spigoli	113
U. DAINELLI. — Sull'equazione $x^y = y^x$ con x ed y interi e positivi .	115
L. CARLINI. — Sull'eguaglianza $a^b = b^a$ con a e b interi e positivi .	117
G. PESCI. — Dei circoli circoscritti ai triangoli formati da n rette poste in un piano	120
A. LUGLI. — Temi di matematica per la licenza d'Istituto tecnico nella sezione <i>fisico-matematica</i>	128, 161
Alcuni temi di matematica proposti per la licenza liceale	130, 180
F. P. PATERNO. — Una dimostrazione di corso intorno ai noti problemi sui poligoni regolari	178
Quistioni proposte	26, 58, 89, 154, 189

	PAG.
Soluzioni delle quistioni 27, 39, 40, 41', 42', 44' e 45.	18
» » » b), 28', 37', 43', 45, 47' e 50'	50
» » » b), 46, 48, 53', 54' e 55'	80
» » » a), c), 49, 51, 52, 56', 57', 58', 59, 60, 61, 62' e 63'	135
» » » 64 e 65	186
R. DE PAOLIS e G. FRATTINI — A. LUGLI. — Rivista bibliografica . . .	28
G. LORIA — A. LUGLI. — Rivista bibliografica	59
F. VIAGGI. — Rivista bibliografica	91
G. LORIA — F. GIUDICE — A. LUGLI. — Rivista bibliografica . . .	155
A. LUGLI. — Rivista bibliografica	190
Pubblicazioni ricevute dalla direzione del Periodico. . . 31, 63, 95, 159, 191	

CONTRIBUTO ALLO STUDIO DEL TETRAEDRO

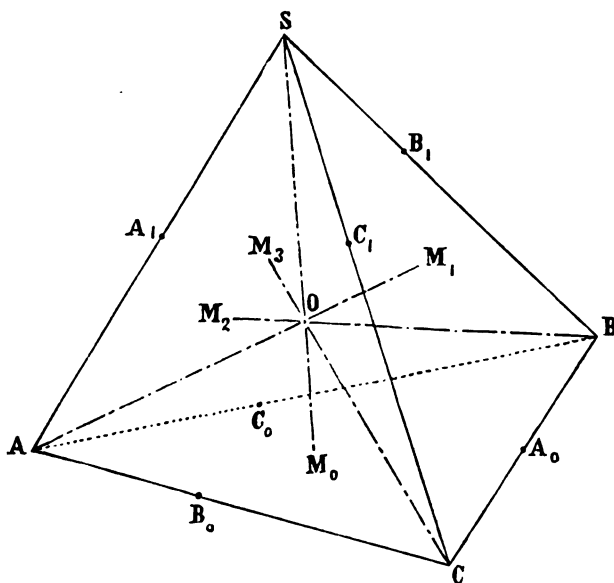
Sia $SABC$ un tetraedro, e pongasi:

$SA = a$, $SB = b$, $SC = c$, $BC = a_1$, $CA = b_1$, $AB = c_1$,

diedro $SA = A$, diedro $SB = B$, diedro $SC = C$,

diedro $BC = A_1$, diedro $CA = B_1$, diedro $AB = C_1$,

area $ABC = S_0$, area $SBC = S_1$, area $SCA = S_2$, area $SBA = S_3$.



Si congiunga un punto interno O coi vertici e sieno $M_0 M_1 M_2 M_3$ i punti d'incontro delle SO , AO , BO , CO colle faccie opposte. Unendo ciascun punto M coi vertici delle rispettive faccie, queste congiungenti s'incontrano a due a due sugli spigoli del tetraedro (ad es. le SM_1 ed AM_0 s'incontrano sullo spigolo BC in un punto A_0). Chiamo A_0 , B_0 , C_0 ,

A_1, B_1, C_1 i punti così determinati sugli spigoli BC, CA, AB, SA, SB, SC . Di questi 6 punti, 2 presi su due spigoli opposti sono allineati con O e 4 presi su due coppie di spigoli opposti (come $A_0 A_1 B_0 B_1$) sono in un piano: reciprocamente se un piano taglia due coppie di spigoli opposti d'un tetraedro, unendo ciascun punto d'intersezione cogli estremi dello spigolo opposto, si determinano sulle faccie 4 punti M , dei quali le congiungenti coi vertici opposti passano per uno stesso punto.

Tra i rapporti dei segmenti determinati sugli spigoli e sulle rette $SM_0 AM_1 BM_2 CM_3$ esiste una relazione, per la ricerca della quale giova ricordare un teorema sul triangolo, che trovasi nel numero del 15 ottobre 1887 del *Journal de Mathématiques élémentaires*.

Teorema. In un triangolo ABC , se le AA', BB', CC' terminate ai lati opposti passano per uno stesso punto O , si ha:

$$\frac{AO}{OA'} = \frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B} \quad (1).$$

Si dimostra applicando ai triangoli $AA'C, AA'B$ (tagliati rispettivamente dalle BB', CC') il teorema di Menelao e ricavando i valori di $\frac{AB'}{B'C}$ e $\frac{AC'}{C'B}$.

Prima di applicare il teorema al tetraedro mi sembra non inutile considerare qualche caso particolare.

1. *Il punto O è centro del cerchio iscritto.* Per la nota proprietà della bisettrice la relazione (1) diventa:

$$\frac{AO}{OA'} = \frac{b+c}{a}.$$

2. *I punti A', B', C' sono i punti di contatto del cerchio iscritto.* Si ha:

$$\frac{AO}{OA'} = (p-a) \left(\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \right).$$

3. *I punti A', B', C' sono i punti di contatto dei cerchi esinscritti.* Si ha:

$$\frac{AO}{OA'} = \frac{p-b}{p-a} + \frac{p-c}{p-a} = \frac{a}{p-a}.$$

Si può verificare che in questo caso e nel precedente si ha :

$$\frac{AA'}{OA'} + \frac{BB'}{OB'} + \frac{CC'}{OC'} = p \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \right).$$

4. Il punto O è tale che da esso si vedono i tre lati sotto lo stesso angolo. — Allora le OA' , OB' , OC' bisecano rispettivamente gli angoli BOC , COA , AOB e per la proprietà della bisettrice la (1) diventa :

$$\frac{AO}{OA'} = \frac{AO}{OC} + \frac{AO}{OB} \text{ ossia } \frac{1}{OA'} = \frac{1}{OC} + \frac{1}{OB}$$

similmente :

$$\frac{1}{OB'} = \frac{1}{OC} + \frac{1}{OA}, \quad \frac{1}{OC'} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB}.$$

Sottraendo a due a due queste relazioni si ricava :

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OA'} = \frac{1}{OB} + \frac{1}{OB'} = \frac{1}{OC} + \frac{1}{OC'}$$

ed addizionando le stesse tre relazioni :

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{OA'} + \frac{1}{OB'} + \frac{1}{OC'} \right);$$

la quale sta anche quando il punto O è il baricentro del triangolo.

Venendo ora al tetraedro $SABC$, considero il triangolo SAB , da cui pel teorema precedente si ha ;

$$\frac{SM_3}{M_3C_0} = \frac{SA_1}{A_1A} + \frac{SB_1}{B_1B}$$

e dal triangolo SC_0C :

$$\frac{SO}{OM_0} = \frac{SM_3}{M_3C_0} + \frac{SC_1}{C_1C}$$

$$\text{da cui : } \frac{SO}{OM_0} = \frac{SA_1}{A_1A} + \frac{SB_1}{B_1B} + \frac{SC_1}{C_1C}. \quad (2)$$

Analoghe relazioni si hanno per le $AM_1BM_2CM_3$.

Considero alcuni casi particolari : ometto perchè assai noto il caso che i punti $A_0A_1B_0B_1$ sieno i punti medi degli spigoli corrispondenti.

1. *I punti $A_0 A_1 B_0 B_1$ sono i piedi comuni delle altezze nelle faccie corrispondenti.* Allora i punti M sono i punti d'incontro delle altezze (ortocentri) delle faccie e le due coppie di spigoli opposti (e quindi la terza coppia) sono ortogonali fra loro. Inoltre poichè i piani $S B_0 B_1$, $S A_0 A_1$ sono perpendicolari alla faccia $A B C$, la retta $S M_0$ è l'altezza relativa a questa faccia e similmente $A M_1$, $B M_2$, $C M_3$ le altezze relative alle faccie $S C B$, $S A C$, $S B A$, onde in questo caso si ha che le 4 altezze del tetraedro passano per uno stesso punto. Ma allora è noto che la somma dei quadrati degli spigoli opposti è costante e reciprocamente. Laonde il teorema:

Se in un tetraedro è costante la somma dei quadrati degli spigoli opposti, le congiungenti i vertici cogli ortocentri delle facce opposte (altezze del tetraedro) passano per uno stesso punto e reciprocamente.

I 6 punti $A_0 B_0 C_0 A_1 B_1 C_1$ sono su di una sfera che interseca le faccie del tetraedro secondo i rispettivi cerchi dei nove punti.

2. *I punti $A_0 A_1 B_0 B_1$ sono gli estremi (comuni) delle bisettrici degli angoli opposti nelle faccie corrispondenti.* Allora i punti M sono i centri dei cerchi iscritti nelle faccie, e per la nota proprietà della bisettrice si ha:

$$\frac{B A_0}{A_0 C} = \frac{c_1}{b_1} \text{ e } \frac{B A_0}{A_0 C} = \frac{b}{c} \text{ da cui } \frac{c_1}{b_1} = \frac{b}{c} \text{ ossia } b b_1 = c c_1.$$

Similmente si ha $a a_1 = b b_1$. Reciprocamente se $a a_1 = b b_1 = c c_1$ le bisettrici degli angoli nelle faccie s'incontrano sugli spigoli. Laonde il teorema:

Se in un tetraedro è costante il prodotto degli spigoli opposti, le congiungenti i vertici coi centri dei cerchi iscritti nelle faccie opposte passano per uno stesso punto e reciprocamente.

La relazione (2) diventa:

$$\frac{S O}{O M_0} = \frac{a}{c_1} + \frac{b}{a_1} + \frac{c}{b_1} = \frac{a a_1 (a_1 + b_1 + c_1)}{a_1 b_1 c_1} = \frac{a a_1}{2 R_0 r_0}$$

dove R_0 , r_0 sono i raggi dei cerchi circoscritto ed iscritto alla faccia $A B C$. — Noto che in questo caso si ha (*):

(*) Cfr. BALTZER. *Elem. di mat.* — Trad. Cremona. Trigonom. § 6, n. 6.

a) La somma dei coseni delle inclinazioni degli spigoli opposti è nulla cioè:

$$\cos (a a_1) + \cos (b b_1) + \cos (c c_1) = 0.$$

b) Le sezioni medie del tetraedro sono proporzionali ai seni delle suddette inclinazioni, cioè:

$$\frac{s(a a_1)}{\text{sen}(a a_1)} = \frac{s(b b_1)}{\text{sen}(b b_1)} = \frac{s(c c_1)}{\text{sen}(c c_1)}.$$

c) I seni stessi sono inversamente proporzionali alle distanze dagli spigoli opposti, cioè:

$$\text{sen}(a a_1) d(a a_1) = \text{sen}(b b_1) d(b b_1) = \text{sen}(c c_1) d(c c_1).$$

d) I seni dei diedri opposti sono inversamente proporzionali, cioè:

$$\text{sen } A \cdot \text{sen } A_1 = \text{sen } B \cdot \text{sen } B_1 = \text{sen } C \cdot \text{sen } C_1.$$

3° I punti $A_0 A_1 B_0 B_1$ sono i punti di contatto (comuni sullo stesso spigolo) dei cerchi iscritti nelle faccie. — Allora si ha:

$$B A_0 = p_0 - b_1 (*) \text{ e } B A_0 = p_1 - c$$

da cui: $a_1 + c_1 - b_1 = a_1 + b - c$ ed anche: $b + b_1 = c + c_1$. Similmente si ha: $a + a_1 = b + b_1$. Reciprocamente se $a + a_1 = b + b_1 = c + c_1$ i cerchi iscritti nelle faccie hanno comuni i punti di contatto collo stesso spigolo. In questo caso i 6 punti $A_0 B_0 C_0 A_1 B_1 C_1$ sono sopra una sfera tangente agli spigoli del tetraedro: e reciprocamente se vi è una sfera tangente agli spigoli del tetraedro, si ha $a + a_1 = b + b_1 = c + c_1$. La relazione (2) diventa:

$$\frac{S O}{O M_0} = \frac{1}{3} (a + b + c - p_0) \left(\frac{1}{p_0 - a_1} + \frac{1}{p_0 - b_1} + \frac{1}{p_0 - c_1} \right).$$

4° I punti $A_0 A_1 B_0 B_1$ sono i punti di contatto (comuni sullo stesso spigolo) dei cerchi ex-iscritti alle faccie. Si ha: $B A_0 = p_1 - b$ e $B A_0 = p_0 - c_1$ da cui: $c + a_1 - b = b_1 + a_1 - c_1$ ed anche $c + c_1 = b + b_1$. Similmente si ottiene $b + b_1 = a + a_1$. Reciprocamente se $c + c_1 = b + b_1 = a + a_1$ i cerchi ex-iscritti alle faccie

(*) Indico con p_0 il semiperimetro della faccia $(A B C)$ dove giace il punto M_0 . Analogamente per le altre faccie.

toccano gli spigoli nei medesimi punti. Questi cerchi a due a due determinano 6 sfere tangenti ciascuna ad uno spigolo ed ai prolungamenti dei 4 spigoli concorrenti negli estremi di questo. Reciprocamente dall'esistenza di queste sfere si deduce: $a + a_1 = b + b_1 = c + c_1$.

La relazione (2) diventa:

$$\frac{S O}{O M_0} = \frac{3 p_0}{a + b + c - p_0}.$$

Da quanto è detto in questi due casi si ha il teorema:

Se in un tetraedro è costante la somma degli spigoli opposti, esiste una sfera tangente agli spigoli del medesimo ed altre 6 sfere tangenti ciascuna ad uno spigolo ed ai prolungamenti dei quattro spigoli concorrenti con questo.

Osservazione — Se si conviene di chiamare *rete* del tetraedro il complesso dei 6 spigoli e *rette della rete* le 6 rette sulle quali giacciono gli spigoli, il teorema precedente si può enunciare così:

Se in un tetraedro è costante la somma degli spigoli opposti esiste una sfera *iscritta* nella rete del medesimo e 6 sfere *ex-iscritte* tangenti a 5 rette della rete.

Credo opportuno poi di aggiungere che:

Se in un tetraedro gli spigoli opposti sono eguali esistono 4 sfere ex-iscritte alla rete del tetraedro e tangenti alle 6 rette della rete.

Ciascuna di queste sfere è tangente a tre spigoli ed ai prolungamenti degli altri tre.

5° *Il punto O è centro della sfera iscritta.* — In questo caso per la proprietà dei piani bisettori dei diedri si ha:

$$\frac{S A_1}{A_1 A} = \frac{S_1}{S_0}, \quad \frac{S B_1}{B_1 B} = \frac{S_2}{S_0}, \quad \frac{S C_1}{C_1 C} = \frac{S_3}{S_0}$$

e perciò la (2) diventa

$$\frac{S O}{O M_0} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_0}.$$

6° *I punti M sono i punti di contatto della sfera iscritta.* — Posto che le $S M_0 A M_1 B M_2 C M_3$ passino per uno stesso punto si ha: $S M_1 = S M_2 = S M_3$, $A M_0 = A M_3 = A M_2$ ecc. e così pure $A_0 M_0 =$

$= A_0 M_1$, $B_0 M_0 = B_0 M_2$ ecc. . . . Ora dal triangolo SA_0C , tagliato dalla BC_1 , pel teorema di Menelao, si ha:

$$\frac{SM_1}{M_1A_0} = \frac{CB}{A_0B} \times \frac{SC_1}{CC_1}.$$

Similmente dal triangolo AA_0C tagliato dalla BB_0 , si ha:

$$\frac{AM_0}{M_0A_0} = \frac{CB}{A_0B} \times \frac{AB_0}{B_0C}.$$

Dividendo membro a membro le due relazioni e riducendo, si ha:

$$\frac{SM_1}{AM_0} = \frac{SC_1}{CC_1} \times \frac{B_0C}{AB_0}.$$

Ma dal triangolo SAC , pel teorema di Ceva, si ha:

$$\frac{SA_1}{AA_1} = \frac{SC_1}{CC_1} \times \frac{B_0C}{AB_0},$$

perciò:

$$\frac{SM_1}{AM_0} = \frac{SA_1}{AA_1} \quad \text{ossia} \quad \frac{SM_3}{AM_3} = \frac{SA_1}{AA_1}$$

cioè M_3A_1 è bisettrice dell'angolo SM_3A . Similmente M_3B_1 è bisettrice dell'angolo SM_3B : d'onde risulta che i tre angoli SM_3A , AM_3B , BM_3S sono eguali.

Lo stesso dicasi per le altre faccie del tetraedro. Laonde il teorema:

Se in un tetraedro le congiungenti i punti di contatto della sfera iscritta coi vertici opposti passano per un punto, da quei punti si vedono i lati delle faccie sotto il medesimo angolo.

Farò da ultimo un'osservazione sulla ricerca del baricentri nelle figure considerate (triangolo e tetraedro).

Ricordo anzitutto che il baricentro del contorno d'un triangolo si ha nel centro del cerchio iscritto nel triangolo che ha per vertici i punti medi dei lati del primo. Con analogo procedimento si può dimostrare che: *Il baricentro della superficie d'un tetraedro è il centro della sfera iscritta nel tetraedro che ha per vertici i baricentri delle faccie del tetraedro dato.* Infatti supposte concentrate le masse delle 4 faccie nei rispettivi baricentri (il che non altera la posizione

del baricentro del sistema) la questione è ridotta a trovare il baricentro dei 4 punti $M_0 M_1 M_2 M_3$ aventi i coefficienti $S_0 S_1 S_2 S_3$. Ora per la nota proprietà dei piani bisettori dei diedri del tetraedro, risulta facilmente che questo è il centro della sfera iscritta nel tetraedro $M_0 M_1 M_2 M_3$ come si è detto.

Ma la ricerca di questi baricentri si può fare anche altrimenti. Ed infatti tornando al contorno del triangolo, è evidente che la posizione del baricentro non cambia, se si suppone che in ciascun vertice si concentri la massa della metà di ciascun lato concorrente in esso vertice; dimodochè la questione è ridotta a trovare il baricentro dei tre vertici aventi coefficienti *proporzionali* alle somme dei lati concorrenti nei medesimi. Perciò nel triangolo ABC se si dividono i lati AB, BC, CA in C', A', B' in modo che:

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{c+a}{c+b}, \quad \frac{BA'}{A'C} = \frac{a+b}{a+c}, \quad \frac{CB'}{B'A} = \frac{b+c}{b+a},$$

il punto O comune alle AA', BB', CC' è il baricentro cercato e si avrà:

$$\frac{AO}{OA'} = \frac{b+c+2a}{b+c} \quad \text{ed anche} \quad \frac{AA'}{OA'} = \frac{2p}{\frac{1}{2}(b+c)}.$$

Collo stesso metodo si ha che il baricentro della superficie del tetraedro coincide con quello dei quattro vertici, ciascuno dei quali abbia un coefficiente proporzionale alla somma delle tre faccie che hanno in comune quel vertice. Perciò nel tetraedro $SABC$ se si dividono gli spigoli AB, BC, CA in modo che:

$$\frac{AC_0}{C_0B} = \frac{S_0+S_1+S_3}{S_0+S_2+S_3}, \quad \frac{BA_0}{A_0C} = \frac{S_0+S_2+S_1}{S_0+S_1+S_3}, \quad \frac{CB_0}{B_0A} = \frac{S_0+S_3+S_2}{S_0+S_2+S_1}$$

il punto M_0 comune alle AA_0, BB_0, CC_0 è il baricentro dei tre punti A, B, C , e perciò sulla SM_0 si troverà il baricentro cercato. Ripetendo le stesse operazioni per le altre faccie e determinati quivi i punti $M_1 M_2 M_3$, come si è fatto per M_0 , il punto O comune alle $SM_0 AM_1 BM_2 CM_3$ è il baricentro cercato: e si avrà

$$\frac{SO}{OM_0} = \frac{3S_0 + 2(S_1 + S_2 + S_3)}{S_1 + S_2 + S_3}$$

ossia anche

$$\frac{S M_0}{O M_0} = \frac{\text{somma delle faccie}}{\frac{1}{3} (S_1 + S_2 + S_3)}.$$

Così pure il baricentro della rete del tetraedro coincide con quello dei 4 vertici aventi ciascuno un coefficiente proporzionale alla somma degli spigoli concorrenti in esso vertice. Perciò con un procedimento somigliante al precedente si determinano 4 punti M sulle faccie: le congiungenti questi punti coi vertici opposti s'incontrano nel baricentro cercato. Indicando questi punti colle solite lettere si ha:

$$\frac{S O}{O M_0} = \frac{a + b + c + 2 (a_1 + b_1 + c_1)}{a + b + c}$$

od anche

$$\frac{S M_0}{O M_0} = \frac{\text{somma degli spigoli}}{\frac{1}{2} (a + b + c)}.$$

È evidente che se il tetraedro ha le faccie eguali gli anzidetti baricentri coincidono con quello del tetraedro.

G. RIBONI.

SUL NUMERO DELLE DIVISIONI

nella ricerca del massimo comune divisore di due numeri

Una nota del prof. Gatti, inserita in questo *Periodico* (luglio-agosto, 1889) con lo stesso titolo della presente, mi ha suggerito le considerazioni che seguono.

Sieno A ed R_n due numeri, pei quali la ricerca del massimo comune divisore dia luogo ad n divisioni, e sia $A > R_n$. Dinotando con

$$Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}, Q_n$$

e con

$$R_{n-1}, R_{n-2}, \dots, R_1, R_0$$

ordinatamente le parti intere de' quozienti ed i resti delle successive divisioni, sarà $R_0 = 0$ ed R_1 il massimo comune divisore dei numeri dati. E si avranno inoltre evidentemente le seguenti eguaglianze:

$$R_n = R_{n-1} Q_2 + R_{n-2}, R_{n-1} = R_{n-2} Q_3 + R_{n-3}, \dots, R_3 = R_2 Q_{n-1} + R_1, R_2 = R_1 Q_n.$$

Da queste eguaglianze, se alla R_1 ed alle Q si danno i più piccoli valori che tali quantità possono avere, cioè se si pone

$$R_1 = 1, Q_n = 2, Q_{n-1} = Q_{n-2} = \dots = Q_2 = Q_1 = 1,$$

si ottengono i minimi valori delle R , e questi sono:

$$R_1 = 1, R_2 = 2, R_3 = 3, R_4 = 5, R_5 = 8, \\ R_6 = 13, R_7 = 21, R_8 = 34, R_9 = 55, R_{10} = 89, \text{ ecc.}$$

ciascuno de' quali è la somma dei due precedenti, sicchè la serie può facilmente prolungarsi quanto si vuole.

Ogni termine di questa serie rappresenta dunque il più piccolo valore che può avere il minore di due numeri perchè la ricerca del massimo comune divisore di essi dia luogo ad un determinato numero di divisioni. Così, per 9 divisioni, il minore dei due numeri non può essere più piccolo di $R_9 = 55$; o altrimenti: se il minore di due numeri è minore di 55, la ricerca del massimo comune divisore dei due numeri non può dar luogo a più di 8 divisioni.

Alcune facili proprietà de' termini della serie considerata permettono di dimostrare molto facilmente i teoremi citati dal professore Gatti e d'introdurre in essi modificazioni vantaggiose.

In primo luogo è chiaro che la serie è crescente e che ciascun termine di essa è maggiore del doppio di quello che lo precede di due posti. Da ciò segue che, essendo $R_2 = 2$, sarà

$$R_4 > 2^2, R_6 > 2^3, \dots, R_{2n} > 2^n \dots \dots \quad (1);$$

ed essendo $R_5 = 8 = 2^3$, sarà

$$R_7 > 2^4, R_9 > 2^5, \dots, R_{2n-1} > 2 \dots \dots \quad (2).$$

Dalle (1) si deduce il teorema:

Se 2^n è la più piccola potenza di 2 la quale eguagli o superi il minore di due numeri dati, nella ricerca del massimo divisore comune a questi due numeri non si possono fare più di $2n - 1$ divisioni, ($n \geq 2$).

Questo teorema è quello citato nella nota del prof. Gatti (art. 5), ma in esso si sono apportate modificazioni di grande vantaggio.

Dalle (2) si deduce poi quest'altro teorema più utile del precedente:

Se 2^n è la più piccola potenza di 2 la quale eguagli o superi il minore di due numeri dati, nella ricerca del massimo divisore comune a questi due numeri non si possono fare più di $2n - 2$ divisioni, ($n > 3$).

Finalmente è facile dimostrare che i termini della serie considerata soddisfano alla relazione

$$R_{2n+1} > 2^{n-1} (n + 2) \quad (3)$$

per $n > 2$.

Questa relazione può verificarsi pei primi termini della serie; così:

$$2^2 (3 + 2) = 20 < R_7, \quad 2^3 (4 + 2) = 48 < R_9, \text{ ecc.}$$

AmMESSO poi che la relazione si sia verificata per R_{2K+1} , cioè che sia

$$R_{2K+1} > 2^{K-1} (K + 2)$$

si dimostra che dovrà essere vera per R_{2K+3} . Infatti si sa che

$$R_{2K+2} = R_{2K+1} + R_{2K} \text{ ed } R_{2K+3} = R_{2K+2} + R_{2K+1};$$

ed eliminando R_{2K+2} , si ha

$$R_{2K+3} = 2 R_{2K+1} + R_{2K}.$$

Ora, per ipotesi

$$R_{2K+1} > 2^{K-1} (K + 2)$$

e per le (1)

$$R_{2K} > 2^K,$$

quindi chiaramente

$$R_{2K+3} > 2 \left\{ 2^{K-1} (K+2) \right\} + 2^K,$$

ovvero

$$R_{2K+3} > 2^K \left\{ (K+1) + 2 \right\}.$$

Dopo ciò la (3) è dimostrata, e da essa si deduce il teorema:

Se n è il più piccolo numero intero tale che $2^{n-1} (n+2)$ eguagli o superi il minore di due numeri dati, nella ricerca del massimo divisore comune a questi due numeri non si possono fare più di $2n$ divisioni, ($n > 2$).

Napoli (Collegio Militare), settembre 1889.

T. FUORTES.

SULL'EGUAGLIANZA $a^b = b^a$ CON a E b INTERI E POSITIVI

1. Se a ed m sono interi e positivi ed è $a \geq 3$, si ha

$$1 + \frac{m}{1} + \frac{m^2}{1 \cdot 2} + \frac{m^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{m^a}{1 \cdot 2 \dots a} < a^m \quad (1)$$

Per $m = 1$ si ha

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots a} < 1 + \\ + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{a-1}} \right)$$

ossia

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots a} < 1 + \\ + \frac{1 - \frac{1}{2^a}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{a-1}}$$

epperiò

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots a} < a \quad (1')$$

Ora se si ammette la (1) per un valore di m , e la si moltiplica per la (1'), si ottiene

$$\left(1 + \frac{m}{1} + \frac{m^2}{1 \cdot 2} + \frac{m^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{m^a}{1 \cdot 2 \dots a}\right) \times$$

$$\left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots a}\right) < a^{m+1} \quad (2)$$

Se i termini del primo polimONIO si indicano con $u_0, u_1, u_2, \dots u_a$, e quelli del secondo con $v_0, v_1, v_2, \dots v_a$, il prodotto dei due polimONI sarà evidentemente maggiore della somma

$$u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \dots$$

$$\dots + (u_0 v_a + u_1 v_{a-1} + \dots + u_{a-1} v_1 + u_a v_0);$$

ma è

$$u_0 v_0 = 1$$

$$u_0 v_1 + u_1 v_0 = m + 1$$

$$u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{m}{1} + \frac{m^2}{1 \cdot 2} = \frac{(m+1)^2}{1 \cdot 2}$$

$$u_0 v_3 + u_1 v_2 + u_2 v_1 + u_3 v_0 =$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{m}{1} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{m^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1} + \frac{m^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{(m+1)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

.....

$$u_0 v_a + u_1 v_{a-1} + \dots + u_{a-1} v_1 + u_a v_0 =$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2 \dots a} + \frac{m}{1} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (a-1)} + \frac{m^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (a-2)} + \dots$$

$$+ \frac{m^{a-2}}{1 \cdot 2 \dots (a-2)} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{m^{a-1}}{1 \cdot 2 \dots (a-1)} \cdot \frac{1}{1} + \frac{m^a}{1 \cdot 2 \dots a} =$$

$$= \frac{(m+1)^a}{1 \cdot 2 \dots a}.$$

Quel prodotto è dunque maggiore di

$$1 + \frac{m+1}{1} + \frac{(m+1)^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{(m+1)^a}{1 \cdot 2 \dots a},$$

epperchè dalla (2) risulta

$$a^{m+1} > 1 + \frac{(m+1)}{1} + \frac{(m+1)^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{(m+1)^a}{1 \cdot 2 \dots a};$$

cioè, ammessa la (1) per un valore di m essa deve pure verificarsi per quel valore di m aumentato di 1.

2. Se a ed m sono interi e positivi, ed è $a \geq 3$, ha luogo la disuguaglianza

$$(a+m)^a < a^{a+m}.$$

Sviluppando si ha

$$\begin{aligned} (a+m)^a &= a^a + a \cdot a^{a-1} m + \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2} a^{a-2} m^2 + \dots \\ &\dots + \frac{a(a-1) \dots (a-r+1)}{1 \cdot 2 \dots r} a^{a-r} m^r + \dots + m^a \end{aligned}$$

ma è

$$\frac{a(a-1) \dots (a-r+1)}{1 \cdot 2 \dots r} a^{a-r} = a^a \frac{\left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{2}{a}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{a}\right)}{1 \cdot 2 \dots r} < \frac{a^a}{1 \cdot 2 \dots r};$$

in conseguenza, e in forza del teorema precedente, sarà

$$(a+m)^a < a^{a+m}.$$

3. L'eguaglianza

$$a^b = b^a$$

con a e b interi e positivi, ha luogo soltanto quando uno dei due numeri è eguale a 2 e l'altro a 4.

Supposto $b > a$ ed eguale ad $a+m$, è chiaro, pel teorema precedente, che l'eguaglianza non può verificarsi se non è $a < 3$.

Ora per $a = 1$, si ha

$$a^b = 1, \quad b^a = 1 + m.$$

Posto poi $a = 2$, l'eguaglianza diviene

$$(2+m)^2 = 2^{2+m}$$

ossia

$$1 + m + \frac{m^2}{4} = 2^m,$$

dalla quale si rileva che il numero m dev'essere pari. Fatto $m = 2n$, risulterà

$$(n + 1)^2 = 2^{2n}$$

ossia

$$n + 1 = 2^n,$$

e in conseguenza $n = 1$, poichè, per $n > 1$ si ha

$$2^n - 1 > n.$$

D. Besso.

UN PROBLEMA D'ARITMETICA

1. Dato il numero $N = a_1 a_2 \dots a_n$, in cui $a_1, a_2, \dots, a_n$ sono numeri primi, trattasi di trovare il numero dei modi differenti nei quali N può decomorsi in due, tre m fattori coniugati, cioè tali che il loro prodotto sia uguale ad N . La trattazione che segue viene poi a mostrare come potrebbero ottenersi i singoli prodotti corrispondenti ad un numero assegnato di fattori coniugati.

2. Consideriamo prima il caso che i fattori coniugati debbano essere due. La decomposizione relativa può venire effettuata come segue.

Si prenda come primo fattore una delle a e come 2° , per conseguenza, il prodotto delle rimanenti $n - 1$ a , poi per 1° fattore il prodotto di due a e come 2° quello delle rimanenti $n - 2$ a , e così via; finalmente come 1° fattore il prodotto di $n - 1$ a e come 2° la rimanente a . Il numero dei successivi prodotti che così si ottengono, sarà:

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n-1}$$

essendo $\binom{n}{1}$ il numero delle combinazioni di n elementi 1 ad 1, $\binom{n}{2}$ quello delle combinazioni di n elementi due a due, ecc., giacchè in ogni caso le rimanenti a sono da comporsi in un fattore unico.

Abbiamo così che il totale numero di questi prodotti è dato, per la formola del binomio, dalla somma

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} = 2^n - 2.$$

Se ora osserviamo che i prodotti stessi sono uguali due a due, per la proprietà commutativa del prodotto, segue che il numero dei modi differenti in cui N può scomporsi in un prodotto di due fattori coniugati è $2^{n-1} - 1$ (*).

3. Passiamo ora ad esaminare il caso in cui i fattori coniugati debbono essere tre, procedendo analogamente a quanto s'è fatto precedentemente.

Si prenda cioè come 1° fattore una lettera a e mantenendo fisso questo fattore si raggruppino le rimanenti $n-1$ a in due fattori coniugati differenti, in tutti i modi possibili, poi prendendo come 1° fattore il prodotto di due a , si compongano le rimanenti $n-2$ a in due fattori coniugati differenti in tutte le maniere possibili, e si proceda così finchè si giunga a scegliere come 1° fattore il prodotto di $n-2$ a e per 2° e 3° fattore l'una e l'altra delle due a rimanenti. In questo caso per avere il numero dei prodotti che si sono ottenuti è chiaro che saranno da moltiplicare i numeri delle combinazioni di n elementi ad 1 ad 1, a 2 a 2, ad $n-2$ ad $n-2$, ossia i numeri

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n-2}$$

rispettivamente per i numeri

$$2^{n-2} - 1, 2^{n-3} - 1, \dots, 2 - 1$$

che indicano $(n, 2)$ quanti siano i modi differenti in cui un prodotto di $n-1$, $n-2$, due fattori primi, può scomporsi in due fattori coniugati; poi dovranno addizionarsi i risultati ottenuti. La somma che così si ricava è

$$\begin{aligned} & \binom{n}{1} 2^{n-2} + \binom{n}{2} 2^{n-3} + \dots + \binom{n}{n-2} 2 - \\ & - \left\{ \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-2} \right\} = \\ & = \frac{(2+1)^n - 2^n - 2n - 1}{2} - \left\{ 2^n - n - 2 \right\} = \frac{3^n - 3 \cdot 2^n + 3}{2}, \end{aligned}$$

sempre per la formola del binomio.

(*) Questo risultato trovasi, ottenuto in altro modo, nelle pregevolissime *Lezioni di Algebra elementare* del Prof. GIACOMO BELLACCHI, vol. I, n. 24, libro del quale siamo lieti di annunziare prossima la pubblicazione di una analisi nelle pagine di questo Periodico.

Se poi si osservi che col metodo seguito per la formazione di questi prodotti, uno stesso prodotto figura tre volte, per es. essendo $N = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$ il prodotto $a_3 \cdot (a_1 a_2) \cdot (a_4 a_5 a_6)$ riappare sotto le due altre forme $(a_1 a_2) \cdot a_3 \cdot (a_4 a_5 a_6)$ e $(a_4 a_5 a_6) \cdot a_3 \cdot (a_1 a_2)$; è da concludersi che il numero dei modi differenti in cui il numero $N = a_1 a_2 \dots a_n$, può risolversi nel prodotto di tre fattori coniugati, è

$$\frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2} = \frac{3^{n-1} - 2 \cdot 2^{n-1} + 1}{2}.$$

4. Passeremo ora a dimostrare, col metodo di *conclusione* da m ad $m + 1$, che il numero dei modi differenti ne' quali il numero N , che è il prodotto di n fattori primi, può scomporsi in un prodotto di m fattori coniugati, essendo $m \leq n$, è dato da

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)} \left\{ m^{n-1} - \binom{m-1}{1} (m-1)^{n-1} + \binom{m-1}{2} (m-2)^{n-1} - \dots \right. \\ \left. \dots - (-1)^{m-1} \binom{m-1}{1} 2^{n-1} + (-1)^{m-1} \cdot 1^{n-1} \right\}. \quad [1]$$

A questo scopo conviene premettere il seguente teorema:

Se $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ sono $n + 1$ numeri qualunque e se con Δu_i s'indica la differenza $u_{i+1} - u_i$, con $\Delta^2 u_i$ la differenza $\Delta (\Delta u_i) = (u_{i+2} - u_{i+1}) - (u_{i+1} - u_i)$ e così via, si ha

$$\Delta^n u_0 = u_n - \binom{n}{1} u_{n-1} + \binom{n}{2} u_{n-2} - \dots \\ \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{1} u_1 + (-1)^n u_0. \quad [2]$$

Infatti segue:

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0, \quad \Delta^2 u_0 = (u_2 - u_1) - (u_1 - u_0) = u_2 - 2u_1 + u_0, \\ \Delta^3 u_0 = \Delta (\Delta^2 u_0) = (u_3 - 2u_2 + u_1) - (u_2 - 2u_1 + u_0) = \\ = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0, \\ \Delta^4 u_0 = (u_4 - 3u_3 + 3u_2 - u_1) - (u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0) = \\ = u_4 - 4u_3 + 6u_2 - 4u_1 + u_0 \\ \dots \dots \dots$$

e, in generale, per la notissima legge di formazione dei coefficienti binomiali che va sotto il nome di *triangolo di Tartaglia* la relazione [2].

(Continua).

A. LUGLI.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI

27, 39, 40, 41, 42, 44 e 45

27. *Dimostrare che, se l'equazione*

$$t^4 - 4t^3 + \alpha t^2 - 4t + \beta = 0$$

ha le quattro radici positive, dev'essere $\alpha = 6$, $\beta = 1$. (D. Besso).

Dimostrazione del Prof. U. Scarpis.

Sieno $t_1 t_2 t_3 t_4$ le radici della data equazione e $P_1 P_2 P_3 P_4$ le loro funzioni simmetriche elementari: sarà intanto

$$P_1 = 4, P_2 = \alpha, P_3 = 4, P_4 = \beta.$$

Ponendo ora $t_1 = 1 + r_1, t_2 = 1 + r_2, t_3 = 1 + r_3, t_4 = 1 + r_4$, ed indicando con $p_1 p_2 p_3 p_4$ le funzioni simmetriche elementari delle quantità $r_1 r_2 r_3 r_4$ si otterranno facilmente le relazioni:

$$\begin{aligned} P_1 &= 4 + p_1 & P_2 &= 6 + p_2 + 3p_1 \\ P_3 &= 4 + 3p_1 + 2p_2 + p_3 & P_4 &= 1 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \end{aligned}$$

dalle quali si deducono subito le altre:

$$\begin{aligned} p_1 &= 0 & 2p_2 + p_3 &= 0 \\ p_2 + 6 &= \alpha & 1 + p_2 + p_3 + p_4 &= \beta. \end{aligned}$$

Da ciò si vede che qualunque sieno le radici dell'equazione proposta, le quantità $r_1 r_2 r_3 r_4$ devono soddisfare alle precedenti condizioni, la seconda delle quali, osservando che da $p_1 = 0$ si può trarre

$$-2p_2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2$$

assume la forma:

$$p_3 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2.$$

Essendo $p_1 = 0$ si scorge che in qualunque ipotesi le $r_1 r_2 r_3 r_4$ non potranno essere tutte positive o tutte negative, e se supponiamo poi che le $t_1 t_2 t_3 t_4$ sieno tutte positive si vede pure che quelle delle $r_1 r_2 r_3 r_4$ che sono negative devono però essere in valore assoluto minori dell'unità.

Esaminiamo quindi i tre seguenti casi.

(1) Sieno

$$r_1 > 0 \quad r_2 < 0 \quad r_3 < 0 \quad r_4 < 0$$

e pongasi

$$r_2 = -\rho_2 \quad r_3 = -\rho_3 \quad r_4 = -\rho_4.$$

Ricavando dalla $p_1 = 0$ il valore di r_1 e sostituendo nella:

$$p_3 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2$$

si ha:

$$\begin{aligned} r_1 &= \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 \\ (\rho_2 + \rho_3 + \rho_4)(\rho_2 \rho_3 + \rho_2 \rho_4 + \rho_3 \rho_4) - \rho_2 \rho_3 \rho_4 &= \\ &= (\rho_2 + \rho_3 + \rho_4)^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2. \end{aligned}$$

Essendo ora per ipotesi $\rho_2 < 1$, $\rho_3 < 1$, $\rho_4 < 1$ sarà:

$$\rho_2 \rho_3 + \rho_3 \rho_4 + \rho_2 \rho_4 < \rho_2 + \rho_3 + \rho_4$$

da cui si deduce subito l'impossibilità della precedente eguaglianza.

(2) Siano $r_1 < 0$ $r_2 > 0$ $r_3 > 0$ $r_4 > 0$ e pongasi $r_1 = -\rho_1$, avremo analogamente:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= r_2 + r_3 + r_4 \\ -(r_2 + r_3 + r_4)(r_2 r_3 + r_3 r_4 + r_2 r_4) + r_2 r_3 r_4 &= \\ &= (r_2 + r_3 + r_4)^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2. \end{aligned}$$

Ma per ipotesi è: $\rho_1 < 1$ e quindi tali pure saranno $r_2 r_3 r_4$ per cui anche in questo caso risulta subito l'impossibilità che sussista la predetta relazione.

(3) Sieno $r_1 > 0$ $r_2 > 0$ $r_3 < 0$ $r_4 < 0$ e si faccia: $r_3 = -\rho_3$ $r_4 = -\rho_4$. Avremo allora:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= \rho_3 + \rho_4 \\ (\rho_3 + \rho_4)(\rho_3 \rho_4 - r_1 r_2) &= r_1^2 + r_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2 \end{aligned}$$

Ma essendo $\rho_3 < 1$, $\rho_4 < 1$ il fattore $(\rho_3 \rho_4 - r_1 r_2)$, anche se positivo, sarà minore di ρ_3 e di ρ_4 e risulta pure come sopra l'impossibilità della predetta condizione.

Ora se l'equazione proposta ha le radici positive, dovranno essere egualmente soddisfatte le relazioni: $p_1 = 0$, $p_3 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2$ ed in questa ipotesi non potranno $r_1 r_2 r_3 r_4$ essere diverse da 0, e quindi dalle due:

$$\alpha = p_2 + 6 \quad \beta = 1 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4,$$

risulterà $\alpha = 6$, $\beta = 1$.

39. Trovare il numero delle radici reali dell'equazione

$$a x^4 + 4 x^3 + 2 a x^2 - 4 x + a = 0$$

in cui a è compreso fra 0 ed 1, e separarle.

(D. BESSO).

Soluzione del prof. U. Scarpis (*).

Anzitutto dalla forma particolare dell'equazione si scorge che se essa è soddi-

(*) Altre soluzioni pervennero dal Sig. prof. S. Gatti, F. Palatini e F. Viaggi.

s fatta da $x = y$ lo sarà pure da $x = -\frac{1}{y}$, per cui potremo rappresentare le sue radici con α , $-\frac{1}{\alpha}$, β , $-\frac{1}{\beta}$. Essendo poi $-\frac{4}{a}$ la somma delle dette radici, e $\frac{2}{a}$ la somma dei loro prodotti due a due, avremo;

$$\alpha - \frac{1}{\alpha} + \beta - \frac{1}{\beta} = -\frac{4}{a}$$

$$\alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} - 2 = 2$$

ovvero:

$$\alpha - \frac{1}{\alpha} + \beta - \frac{1}{\beta} = -\frac{4}{a}$$

$$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right) = 4.$$

Ponendo ora $\alpha - \frac{1}{\alpha} = u$, $\beta - \frac{1}{\beta} = v$ abbiamo: $u + v = -\frac{4}{a}$
 $u \cdot v = 4$ dalle quali:

$$u = \frac{1}{a} (-2 + 2\sqrt{1-a^2}), \quad v = \frac{1}{a} (-2 - 2\sqrt{1-a^2})$$

e sostituendo questi valori di u e v nelle $\alpha^2 - u\alpha - 1 = 0$, $\beta^2 - v\beta - 1 = 0$, si ottiene:

$$\alpha = \frac{1}{a} \left(-1 + \sqrt{1-a^2} \pm \sqrt{2(1 - \sqrt{1-a^2})} \right)$$

$$\beta = \frac{1}{a} \left(-1 - \sqrt{1-a^2} \pm \sqrt{2(1 + \sqrt{1-a^2})} \right).$$

I due valori di α danno per prodotto -1 , e se uno s'indica con α l'altro sarà $-\frac{1}{\alpha}$; considerando che lo stesso vale per i due valori di β , si scorge che le radici dell'equazione proposta saranno:

$$\alpha = \frac{1}{a} \left(-1 + \sqrt{1-a^2} + \sqrt{2(1 - \sqrt{1-a^2})} \right)$$

$$-\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{a} \left(-1 + \sqrt{1-a^2} - \sqrt{2(1 - \sqrt{1-a^2})} \right)$$

$$\beta = \frac{1}{a} \left(-1 - \sqrt{1-a^2} + \sqrt{2(1 + \sqrt{1-a^2})} \right)$$

$$-\frac{1}{\beta} = \frac{1}{a} \left(-1 - \sqrt{1-a^2} - \sqrt{2(1 + \sqrt{1-a^2})} \right).$$

Dall'ipotesi $0 < a < 1$ si deduce subito che le radici sono tutte reali e l'osservazione fatta in principio ci dimostra che due saranno positive e due negative.

Le precedenti espressioni delle radici sono però suscettibili di una semplificazione e questa si ottiene facilmente giovandosi della nota formola:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Si ha allora:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{a} (-1 + \sqrt{1 - a^2} + \sqrt{1 + a} - \sqrt{1 - a}) \\ -\frac{1}{\alpha} &= \frac{1}{a} (-1 + \sqrt{1 - a^2} - \sqrt{1 + a} + \sqrt{1 - a}) \\ \beta &= \frac{1}{a} (-1 - \sqrt{1 - a^2} + \sqrt{1 + a} + \sqrt{1 - a}) \\ -\frac{1}{\beta} &= \frac{1}{a} (-1 - \sqrt{1 - a^2} - \sqrt{1 + a} - \sqrt{1 - a})\end{aligned}$$

e ponendo

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + a} &= p, \quad \sqrt{1 - a} = q \\ x &= \frac{1 + q}{1 + p} = \frac{1 + \sqrt{1 - a}}{1 + \sqrt{1 + a}}, \quad -\frac{1}{x} = -\frac{1 + \sqrt{1 + a}}{1 + \sqrt{1 - a}} \\ \beta &= \frac{p - 1}{q + 1} = \frac{\sqrt{1 + a} - 1}{\sqrt{1 - a} + 1}, \quad -\frac{1}{\beta} = -\frac{\sqrt{1 - a} + 1}{\sqrt{1 + a} - 1}.\end{aligned}$$

Queste formole ci dicono intanto che le due radici positive α, β sono comprese tra 0 ed 1 e che le radici negative si trovano quindi tra -1 e $-\infty$.

La media aritmetica

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + a}}$$

ci somministra un valore atto a separare le radici positive: l'inversa di questa quantità, presa negativamente, servirà a separare le radici negative.

Considerando poi l'equazione proposta si trova subito come limite inferiore delle radici positive il valore $\frac{a}{4}$ e quindi come limite inferiore delle radici negative $-\frac{4}{a}$.

40. Eliminare x, y, z dalle tre equazioni

$$\begin{aligned}Ax + By + Cz &= 0 \\ \frac{A_1}{x} + \frac{B_1}{y} + \frac{C_1}{z} &= 0 \\ A_2x^2 + B_2y^2 + C_2z^2 &= 0.\end{aligned}$$

(D. Besso).

Soluzione del Prof. S. Catania.

Le prime due equazioni, dopo di avere scritto nei secondi membri i termini in z , si moltiplichino membro a membro, e vi si ponga $\frac{x}{y} = u$; si avrà:

$$A B_1 u^2 + (A A_1 + B B_1 - C C_1) u + A_1 B = 0.$$

Nella prima equazione si scriva Cz nel secondo membro, e poscia si innalzi al quadrato. Si paragoni indi l'equazione ottenuta con la terza, allo scopo di eliminare z , e si ponga anche qui $\frac{x}{y} = u$; si avrà:

$$(A^2 C_2 + A_2 C^2) u^2 + 2 A B C_2 u + B^2 C_2 + B_2 C^2 = 0.$$

Con uno qualunque dei metodi notissimi eliminando u , da queste due equazioni quadratiche, si avrà la relazione cercata, la quale, dopo alcune riduzioni, si può mettere sotto la seguente forma:

$$\begin{aligned} & A^4 A_1^2 B_2 C_2 - 2 A^3 A_1 (B B_1 + C C_1) B_2 C_2 + \\ & + A^2 (B^2 B_1^2 + C^2 C_1^2) B_2 C_2 + A_1^2 A_2^2 B^2 C^2 + \\ & + B^4 B_1^2 C_2 A_2 - 2 B^3 B_1 (C C_1 + A A_1) C_2 A_2 + \\ & + B^2 (C^2 C_1^2 + A^2 A_1^2) C_2 A_2 + B_1^2 B_2^2 C^2 A^2 + \\ & + C^4 C_1^2 A_2 B_2 - 2 C^3 C_1 (A A_1 + B B_1) A_2 B_2 + \\ & + C^2 (A^2 A_1^2 + B^2 B_1^2) A_2 B_2 + C_1^2 C_2^2 A^2 B^2 = 0. \end{aligned}$$

41°. Se con $\binom{m}{r}$ s'indica il numero delle combinazioni di m elementi ad r ad r , ha luogo la relazione

$$\binom{n-1}{2r} + \frac{n-1}{2r-1} \binom{n-2}{2r-2} = \binom{n}{2r}. \quad (\text{D. BESSO}).$$

Soluzione del Sig. S. Lopriore, alunno del R. Liceo di Bari.

Si ha infatti:

$$\begin{aligned} & \binom{n-1}{2r} + \frac{n-1}{2r-1} \cdot \binom{n-2}{2r-2} = \\ & = \frac{(n-1)(n-2) \dots (n-2r)}{1 \cdot 2 \dots 2r} + \frac{(n-1)(n-2) \dots (n-2r+1)}{1 \cdot 2 \dots (2r-2)(2r-1)} = \\ & = \frac{(n-1)(n-2) \dots (n-2r+1)}{1 \cdot 2 \dots (2r-1)} \left\{ \frac{n-2r}{2r} + 1 \right\} = \binom{n}{2r} \end{aligned}$$

poichè $\frac{n-2r}{2r} + 1 = \frac{n}{2r}$.

42. *Se in un esagono $AB'CA'BC'$ inscritto in un cerchio, le rette AA' , BB' , CC' che uniscono i vertici opposti, si incontrano in un punto, il prodotto dei lati di posto dispari è uguale al prodotto dei lati di posto pari. Si ha cioè $AB' \cdot CA' \cdot BC' = A'B \cdot C'A \cdot B'C$.* (A. SAUVE).

Soluzione del Sig. P. Patrassi alunno del R. Istituto tecnico di Terni (*).

Chiamando O il punto d'intersezione comune delle rette AA' , BB' , CC' , congiungenti i vertici opposti, è chiaro che i triangoli $C'OA$, COA' sono simili poichè $\text{ang. } C'OA = COA'$, siccome opposti al vertice, e $\text{ang. } AC'O = OA'C$, perchè angoli al cerchio insistenti sullo stesso arco. Per ragioni analoghe sono simili i triangoli $A'OB$ ad AOB' e $B'OC$ a BOC' . Da queste tre coppie di triangoli simili si hanno le uguaglianze

$$CA' \cdot OA = C'A \cdot OC, AB' \cdot OB = A'B \cdot OA, BC' \cdot OC = B'C \cdot OB$$

che moltiplicate membro a membro, dopo la soppressione del fattore comune ai due membri $OA \cdot OB \cdot OC$, danno

$$CA' \cdot AB' \cdot BC' = C'A \cdot A'B \cdot B'C$$

ciò che d. d. (**).

44*. *Se si circoscrive un cerchio ad un triangolo equilatero ABC , dimostrare geometricamente: 1° che la somma delle distanze di un punto qualunque P , dell'arco BC , ai vertici B e C è eguale a PA ; 2° che la somma $PA + PB + PC$ è massima quando P è il punto medio dell'arco BC .*

(A. LUGLI).

Dimostrazione del Sig. U. Grossato, alunno del R. Istituto tecnico di Girgenti (***).

Essendo $ABPC$ un quadrilatero inscritto, pel teorema di Tolomeo, si ha:

$$AP \cdot BC = CA \cdot BP + AB \cdot CP$$

e poichè, per ipotesi, si ha $BC = CA = AB$, sopprimendo i fattori uguali, risulta:

$$AP = BP + CP.$$

Se poi P è il punto medio dell'arco BC , è manifesto che AP è diametro e perciò maggiore di qualsiasi corda. In tal caso la somma $PA + PB + PC = 2PA$ ha il suo massimo valore.

(*) Soluzioni analoghe di questa questione vennero inviate dai Signori G. D'Asdia (R. Istituto tecnico Girgenti), S. Jovino (R. Istituto tecnico Bari), S. Lopriore (R. Liceo Bari), G. Piuma (Regio Liceo Colombo Genova).

(**) Come, giustamente, osserva il Sig. D'Asdia la proposizione sussiste tanto per un esagono convesso quanto per uno intrecciato.

(***) Altre dimostrazioni, sostanzialmente uguali all'una od all'altra delle due qui pubblicate, vennero inviate dai Signori G. D'Asdia (R. Istituto tecnico Girgenti), S. Jovino (R. Istituto tecnico Bari), S. Lopriore (R. Liceo Bari), G. Piuma (R. Liceo Colombo Genova), P. Patrassi (R. Istituto tecnico Terni).

Dimostrazione del Sig. *E. Caterra*, alunno della R. Scuola tecnica di Velletri.

Prolunghisi BP in P' così che sia $PP' = PC$ e congiungasi P' con C . Gli angoli $P'PC, BAC$, che hanno lo stesso supplemento CPB , saranno uguali e poichè BAC è angolo di un triangolo equilatero sarà pure tale l'angolo $P'PC$ onde può concludersi che il triangolo $P'PC$ è equilatero, per conseguenza $CP' = PC$. Fatto l'angolo BCP comune, è chiaro che sarà la somma degli angoli $ACB + BCP = BCP + PCP'$, onde l'intero angolo $ACP = BCP'$ e i due triangoli ACP, BCP' sono eguali per avere il lato $AC = BC$, $CP = CP'$ ed uguali gli angoli compresi dai lati uguali. Risulta così che $AP = BP' = BP + PP' = BP + CP$.

Per la 2ª parte il ragionamento è quello della dimostrazione precedente.

Osservazione — Se P, M, N sono i punti medi degli archi BC, CA, AB l'esagono $ANBPCM$ è regolare e il suo perimetro vale tre diametri, risulta così che il suo lato è uguale al raggio, com'è notissimo.

45. Se A' è il punto del lato BC di un triangolo ABC pel quale si ha $BA' : A'C = m$ e P il punto in cui AA' incontra la circonferenza circoscritta al triangolo, dimostrare: 1º che

$$PA + PB + PC = \frac{c(a+c) + mb(a+b)}{\sqrt{(1+m)(mb^2 + c^2) - a^2m}};$$

2º che il valore massimo della somma delle tre distanze del punto P ai tre vertici del triangolo si ha quando questa somma uguaglia

$$2\sqrt{R(R+2r_1)},$$

dove R e r_1 indicano il raggio del cerchio circoscritto al triangolo e quello del cerchio ex-inscritto relativo al lato a . (A. LUGLI).

Dimostrazione del prof. *T. Merante* (*).

1. Chiamiamo φ e ψ gli angoli BAP, CAP , che la retta AP forma rispettivamente coi lati adiacenti c e b , sarà

$$A = \varphi + \psi, \quad \frac{mb}{c} = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}.$$

Eliminando l'angolo ψ si ottiene

$$c \sin \varphi = mb \sin (A - \varphi);$$

sviluppando $\sin (A - \varphi)$ e dividendo per $\cos \varphi$, otteniamo

$$\tan \varphi = \frac{mb \sin A}{c + mb \cos A}.$$

(*) Altre soluzioni vennero inviate dal sig. prof. *S. Catania*, *G. Ciabò*, *S. Gatti*, *G. Riboni*, e *F. Viaggi*.

Svilupparono la sola 1ª parte i giovani *G. Gallucci* e *G. Bitonti* alunni dell'Istituto tecnico di Catania.

Eliminando invece l'angolo φ si troverà con processo analogo

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{c \operatorname{sen} A}{m b + c \cos A}.$$

Dall'espressioni delle tangenti degli angoli φ e ψ si deducono immediatamente quelle dei loro seni e coseni, ossia:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \varphi &= \frac{m b \operatorname{sen} A}{\sqrt{m^2 b^2 + c^2 + 2 m b c \cos A}}, & \cos \varphi &= \frac{c + m b \cos A}{\sqrt{m^2 b^2 + c^2 + 2 m b c \cos A}} \\ \operatorname{sen} \psi &= \frac{c \operatorname{sen} A}{\sqrt{m^2 b^2 + c^2 + 2 m b c \cos A}}, & \cos \psi &= \frac{m b + c \cos A}{\sqrt{m^2 b^2 + c^2 + 2 m b c \cos A}}. \end{aligned}$$

Ora, essendo

$$\frac{P A}{\operatorname{sen} (C + \varphi)} = \frac{P B}{\operatorname{sen} \varphi} = \frac{P C}{\operatorname{sen} \psi} = \frac{a}{\operatorname{sen} A},$$

sarà

$$P A + P B + P C = \frac{a}{\operatorname{sen} A} \left\{ \operatorname{sen} (C + \varphi) + \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} \psi \right\}.$$

Sostituendo a $\operatorname{sen} \varphi$, $\operatorname{sen} \psi$, $\cos A$, $\cos C$ i loro valori, abbiamo

$$P A + P B + P C = \frac{c (\alpha + c) + m b (\alpha + b)}{\sqrt{(1 + m) (m b^2 + c^2) - \alpha^2 m}}.$$

2. Per determinare il valore massimo di questa espressione, poniamo

$$\frac{c (\alpha + c) + m b (\alpha + b)}{\sqrt{(1 + m) (m b^2 + c^2) - \alpha^2 m}} = y$$

e cerchiamo per quali valori di y l'equazione in m

$$b^2 \left\{ (\alpha + b)^2 - y^2 \right\} m^2 + \left\{ 2 b c (\alpha + b) (\alpha + c) - (b^2 + c^2 - \alpha^2) y^2 \right\} m + c^2 \left\{ (\alpha + c)^2 - y^2 \right\} = 0$$

ha radici reali. Per la realtà delle radici basta che

$$\begin{aligned} & \left\{ 2 b c (\alpha + b) (\alpha + c) - (b^2 + c^2 - \alpha^2) y^2 \right\}^2 - \\ & - 4 b^2 c^2 \left\{ (\alpha + b)^2 - y^2 \right\} \left\{ (\alpha + c)^2 - y^2 \right\} = \\ & = 4 y^2 \left\{ a b c \left\{ 8 p (p - b) (p - c) + a b c \right\} - 4 p (p - a) (p - b) (p - c) y^2 \right\} \end{aligned}$$

non sia negativa. Quindi il valore massimo di y è

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a b c \left\{ 8 p (p - b) (p - c) + a b c \right\}}{4 p (p - a) (p - b) (p - c)}} &= \sqrt{\frac{\alpha^2 b^2 c^2}{4 \Delta^2} + \frac{2 a b c}{p - a}} = \\ &= \sqrt{4 R^2 + 8 R r_1} = 2 \sqrt{R (R + 2 r_1)}. \end{aligned}$$

QUISTIONI PROPOSTE (*)

a). (**) Se i raggi dei cerchi inscritti nelle quattro facce d'un tetraedro sono fra loro eguali, è necessario che le facce stesse siano fra loro eguali?

D. BESSO.

b). Il luogo dei punti, del piano d'un triangolo dato, tali che i piedi delle perpendicolari, condotte da uno qualunque di essi ai tre lati, formino un triangolo di data area, è una circonferenza concentrica a quella circoscritta al triangolo dato.

G. LORIA.

c). Fra quali limiti devono essere compresi gli angoli d'un triangolo affinchè si possa costruire un triangolo colle distanze del centro del circolo circoscritto ai tre lati?

46. Dimostrare che, se l'equazione

$$x^6 + 3ax^5 + \left(3a^2 - \frac{6}{a}\right)x^4 - 20x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

ha tutte le radici positive, esse devono essere eguali ad 1.

47*. Verificare le disuguaglianze

$$\frac{m(b-a)}{b^{m+1}} < \frac{1}{a^m} - \frac{1}{b^m} < \frac{m(b-a)}{a^{m+1}}$$

nelle quali è $b > a > 0$, ed m significa un intero positivo.

48. Assegnare il limite al quale tende la funzione

$$n^{m-1} \left\{ \frac{1}{(n+1)^m} + \frac{1}{(n+2)^m} + \frac{1}{(n+3)^m} + \dots + \frac{1}{(n+n)^m} \right\}$$

(*) Le questioni contrassegnate con asterisco sono specialmente destinate agli alunni delle nostre Scuole e di esse si pubblicheranno soltanto le soluzioni inviate dagli alunni stessi.

(**) Le quistioni a), b) e c) furono già proposte a pag. 32 e 99 del Vol. I. ed a pag. 59 del Vol II. del *Periodico*, ma rimasero insolute. È perciò che se ne ripetono gli enunciati.

quando n tende all'infinito, nell'ipotesi che m sia un intero positivo costante.

49. Dimostrare che, quando n tende all'infinito, si ha

$$\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{2}} + \frac{1}{\sqrt[n]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right) = 2.$$

50*. Dimostrare che in un decagono stellato, quale si ottiene prolungando i lati d'un pentagono convesso, il prodotto dei lati di posto dispari è eguale al prodotto dei lati di posto pari.

51. Risolvere l'equazione

$$x^5 + 5ax^3 + 5a^2x + b = 0.$$

52. Risolvere l'equazione

$$x^7 + 7ax^5 + 14a^2x^3 + 7a^3x + b = 0.$$

D. BESSO.

53*. Dati di posizione nel piano n punti, costruire un poligono i cui lati passino per i punti dati e sieno divisi da questi, nel medesimo senso, in parti aventi un rapporto uguale a quello di due segmenti dati.

Mostrare che il problema ammette un'infinità di soluzioni se n è pari e i segmenti dati sono uguali fra loro, una soluzione unica in tutti gli altri casi.

54*. Se con $\binom{n}{r}$ s'indica il numero delle combinazioni di n elementi ad r ad r , dimostrare la relazione

$$\binom{m-1}{h} + \binom{m-1}{h+1} \frac{m-h}{m-h-1} = \frac{m+1}{m} \binom{m}{h+1}.$$

55*. Dimostrare che l'espressione

$$4^n - 3^{n+1} + 3 \cdot 2^n - 1$$

è multipla di 6, qualunque sia l'intero positivo n , e che il quoziente della sua divisione per 6 è > 0 per ogni valore di $n > 2$.

A. LUGLI.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

PROF. ANTON MARIA BUSTELLI. — *L'insegnamento dell'aritmetica e della geometria secondo i nuovi programmi ufficiali per le scuole primarie e popolari.* — Città di Castello, S. Lapi tipografo editore, 1889.

Questo libro del Prof. Bustelli ha per oggetto l'insegnamento dell'aritmetica e della geometria nelle scuole elementari; ma, come l'A. dichiara nella prefazione, molte delle cose discorse in esso sono anche applicabili all'insegnamento della matematica elementare nelle scuole preparatorie alle normali, nelle scuole tecniche e nelle ginnasiali inferiori. Si divide in cinque conferenze. La prima, salvo lievi modificazioni, è la ristampa di un opuscolo dello stesso A., opuscolo che meritò il plauso di ragguardevoli persone e una lettera onorifica del Professor Cremona, come risulta dai documenti che accompagnano la pubblicazione della quale ci occupiamo.

All'autorevole voce del Prof. Cremona uniamo di gran cuore la nostra nella lode di maestro espertissimo di cose pedagogiche e di efficace espositore di eccellenti norme didattiche, tributata al Bustelli; e ci gode altresì l'animo per gli insoliti onori che il Ministero della pubblica istruzione rese al libro di questi, sebbene ci paia che il libro stesso, come d'altra parte ogni bella e buona cosa, non sia scevro di difetti e di mende, nè potremmo, e forse a torto, far nostro in tutto e per tutto il pensiero dell'A. in fatto di metodo. Ci sembra, per esempio, che pur facendo ragione alle necessarie attinenze che gli studi della scuola elementare hanno con quelli della scuola secondaria, i metodi dell'una non sieno d'ordinario applicabili all'altra: tanto è vero, che riducendo di mole un eccellente libro pei grandi, non si riuscirebbe davvero a fare il buon libro dei piccoli.

Frattanto non vorremmo che il metodo proposto dal Bustelli per la trattazione di talun argomento, se ottimo per una scuola secondaria, non fosse convenevole ad una scuola elementare, dove l'attenzione degli alunni non si volge alla materia e al maestro che a tratti e fugacemente. Derivare il concetto generale del moltiplicare e del dividere dalla discussione di quesiti della stessa specie è certo ottima cosa, ma l'esame paziente e la sintesi dei vari casi non ci sembrano facili a ottenere da giovanetti delle scuole elementari. Piuttosto, dacchè l'A., a pagina 118, consiglia e molto opportunamente, la sostituzione momentanea dei dati interi ai dati frazionari, a fine di scoprire quali sieno le operazioni da fare per risolvere questo o quel problema, non si potrebbe, in proposito del moltiplicare o dividere per frazione, limitare l'insegnamento pressochè alle sole regole, e verificare di quando in quando la giustezza di taluni risultati facendo ricorso al metodo di riduzione all'unità?

Alcuni sostengono, e con valide ragioni, che l'insegnamento della matematica nelle scuole elementari debba contenersi entro i limiti delle quattro ope-

razioni con gl'interi e co' decimali, e di quel tanto di geometria ch'è indispensabile al vivere civile di ogni ceto di persone. I programmi ufficiali delle nostre scuole dispongono ben altrimenti. Pertanto ci sembra che non sia proprio il caso di rincarare la dose, aggiungendo e la misura dei solidi, e uno studio abbastanza minuzioso dei medesimi, come vorrebbe il Bustelli. E a questo proposito: mentre riconosciamo di avere imparato molto dalla lettura delle pagine dello stesso Bustelli in argomento di geometria sperimentale, non possiamo tacere che taluni dei metodi sperimentali dei quali l'A. fa cenno ne hanno lasciato in qualche dubbio e nel desiderio di una esposizione sistematica e particolareggiata dei medesimi. Leggiamo per esempio a pagina 27: « Qui sarà utilissimo che il maestro dimostri, sempre per vie sperimentali, essere cinque e solo cinque le specie di poliedro regolare ». Ci sarebbe piaciuto che l'A. avesse tracciata egli stesso la via sperimentale che il maestro dovrebbe seguire per mettere in chiaro le due proposizioni, e specialmente la seconda.

Opportunissime e sagaci parecchie osservazioni del Bustelli in proposito della legge di proporzionalità. Ma siamo di parere che egli esageri alquanto le difficoltà del metodo dell'unità di contro a quello delle proporzioni, in questione di taluni problemi dipendenti dalla regola del tre semplice. Gli esempi a pagina 120 del libro non ci convincono pienamente. Ci è sembrato che, nella discussione dei medesimi, un soverchio amore della tesi abbia sospinto l'A. a qualche artificio, altrimenti evitabile. Quanto alla definizione della proporzionalità quale eguaglianza dei rapporti fra gli stati corrispondenti di due grandezze che dipendono l'una dall'altra, definizione che l'A. preferisce a quella comunemente in uso, adottata dal Baltzer, osserveremo che, nella pratica dei problemi, ove fosse mestieri accertare la detta eguaglianza, s'incomincierebbe, naturalmente, ad assegnare a uno dei rapporti i più semplici valori, quali sono 2 o $\frac{1}{2}$, 3 o $\frac{1}{3}$, ecc.; e conseguentemente a supporre doppia o metà, tripla o terza parte ecc. una delle due grandezze. Se tale divenisse contemporaneamente anche l'altra, si potrebbe ritenere senz'altro essere le due grandezze proporzionali, com'è facile dimostrare. *La definizione degli uguali rapporti* (interi, fratti o irrazionali) contiene perciò più del necessario, e quando ne la si spogli, si riduce a quella, semplicissima, che l'A. vorrebbe evitare. Crediamo finalmente che, ad una nuova edizione del libro, sarebbero da omettere i paragrafi 61, 62 e 63. Non pare si accordino con l'indole elementare del resto dell'opera.

Se l'egregio A. nel riordinare il suo lavoro, che per la lieta accoglienza fattagli dal pubblico sembra prossimo alla ristampa, vorrà tenere in debito conto le nostre osservazioni, ci parrà fortuna l'averle, benchè in sì scarsa misura, contribuito con lui all'incremento della buona pedagogia delle nostre scuole.

RICCARDO DE PAOLIS.

GIOVANNI FRATTINI.

E. GELIN (l'Abbé) — *Eléments de Trigonométrie Plane et sphérique* — Namur, Huy, 1888 — Prix: 5,40 fr.

Quest'opera del prof. GELIN, noto per reputati altri lavori scolastici, oltrechè ad uso degli allievi dei corsi professionali, dei candidati alle scuole speciali delle Università ed alla scuola militare di Bruxelles, come leggesi nel frontispizio, sarebbe a mio giudizio da chiamarsi ad uso dell'istruzione di se medesimi, *zum Selbstunterricht* come dicono i tedeschi, tanto la materia è presentata con ordine al lettore, le dimostrazioni vi sono chiare senza pregiudizio dell'esattezza e le diverse teorie sono illustrate da ben scelti esercizi e problemi risolti.

Divise sono le opinioni se un libro di testo debba piuttosto essere un sunto sucoso delle lezioni che impartisce l'insegnante, lasciando alla viva voce di questo la cura d'eliminare quelle difficoltà che l'alunno potesse incontrare alla perfetta intelligenza di questa o quella verità, o se meglio non valga che il libro di testo spiani quasi la via all'allievo e possa considerarsi come una riproduzione inanimata della parola del docente. Per chi opina come in quest'ultimo caso il libro del prof. GELIN, può citarsi a *modello* e questo fatto non dev'essere stato ultimo fra quelli pei quali l'Accademia Reale del Belgio, assegnò a quest'opera l'alta onorificenza di un premio.

Il libro contiene sostanzialmente le teoriche che trovansi nella trigonometria del SERRET ed è diviso in quattro sezioni, i cui titoli sono — *Teoria delle linee trigonometriche* (*) — *Trigonometria rettilinea* — *Trigonometria sferica* — *Complementi di trigonometria*. — In ciascuna son svolti con molta larghezza gli argomenti che vi si riferiscono e l'A. non trascura occasione di dare anche più dimostrazioni d'uno stesso teorema o diverse deduzioni d'una medesima proprietà. Questo accade ad es. per le formole relative all'addizione degli archi; per la formola che rende monomia la somma $\cot a \pm \cot b$; per la formola $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)$: $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B) = a+b : a-b$, che stabilisce la nota relazione tra due angoli d'un triangolo ed i lati opposti; per la formola che esprime l'area d'un triangolo in funzione dei lati, per la formola della trigonometria sferica $\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}$; per la formola del LHUIER che dà la tang. di $\frac{1}{4}$ dell'eccesso sferico d'un triangolo in funzione dei lati e per l'espressione di questo eccesso; ecc. ecc..

Non poche sono le cose notevoli contenute in questo volume, che difficilmente saprebbero trovarsi in altra opera sulla stessa materia, essendo introdotti nel medesimo gran parte dei perfezionamenti e dei progressi realizzati dalla trigonometria negli ultimi tempi ed alcune novità dovute allo stesso A.. Noto ad

(*) Vi sarà chi s'impunerà alla parola *linea*, che veramente non è la più propria ad indicare quei rapporti che la trigonometria considera, ma in fondo è questione di parola e non c'è da farne gran caso.

es. gli sviluppi di $\sin(a + b + c + \dots)$, $\cos(a + b + c + \dots)$, $\tan(a + b + c + \dots)$, $\sin ma$, $\cos ma$, $\tan ma$, ricavati nella loro forma generale fino dalle prime pagine; i valori delle tangenti, cotangenti, secanti e cosecanti di tutti gli archi multipli di 3° , dati con *denominatori razionali*; molti esempi di verificaione di identità trigonometriche con largo contributo all'analogia fra queste e le identità algebriche; molti e interessanti esercizi di risoluzione d'equazioni trigonometriche; una serie assai copiosa di relazioni fra i tre angoli d'un triangolo obliquangolo; poi un gran numero di formole riferentesi ai cerchi circoscritto, inscritto ed ex-inscritti al triangolo rettilineo e sferico ed alla risoluzione di quello, allorchè i dati non sono lati ed angoli, come pure relative al quadrilatero piano qualunque e inscrittibile, e la trattazione di parecchi problemi non usuali di trigonometria sferica.

E non meno sviluppate sono le applicazioni pratiche della trigonometria propriamente detta, prima con numerosi esempi numerici di risoluzione dei triangoli sì rettilinei che sferici, poi colla risoluzione di problemi relativi alla misura di altezze e distanze e con un cenno sulle triangolazioni geodetiche.

La 4^a sezione dell'opera comprende le teoriche che fanno parte dei complementi della trigonometria del SERRET e in parte anche delle note della edizione italiana di questa di A. FERRUCCI, ed oltre a ciò il metodo delle proiezioni, con applicazione alla dimostrazione generale della formula che dà il seno e coseno della somma di due archi ed alla deduzione della relazione fondamentale della trigonometria sferica; la somma dei seni e coseni d'archi in progressione aritmetica; la trattazione di diverse quistioni di massimo e minimo e di questioni varie di trigonometria. È da segnalare poi qui una semplificazione della risoluzione trigonometrica dell'equazione $x^3 + px + q = 0$, nel caso di una radice reale e due immaginarie, per cui non viene in campo la considerazione delle radici immaginarie dell'unità. Tutta la materia vi è svolta sempre in quella forma piana a cui sopra accennammo in modo da darle un valore altamente didattico.

Non possiamo esimerci però da un appunto all'intera opera cioè che essa non sia provvoluta di una serie opportunamente scelta di esercizi per gli scolari sui quali questi potessero esercitare la loro sagacità.

La lettura del libro del Prof. GELIN persuaderà chi non ne fosse ancora convinto che anche le matematiche elementari non sono immobilizzate ma ubbidiscono pur esse alla legge generale della natura per la quale tutto è moto e progresso.

A. LUGLI.

Publicazioni ricevute dalla Direzione del Periodico

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del professore G. BATTAGLINI. Vol. XXVII. Novembre-Dicembre. Napoli, B. Pellerano editore, 1889.

Journal de Mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous

- la direction de MM. DE LONGCHAMPS, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, LUCIEN LÉVY, agrégé des sciences mathématiques, directeur des études à l'Ecole préparatoire de Saint-Barbe. 3^e Série, Treizième année. N. 12. Décembre, 1889. Quatorzième année. N. 1. Janvier, 1890. Paris, libraire Ch. Delagrave.
- Journal de Mathématiques élémentaires* publié par H. VUIBERT. 14 année. N. 6, 7, 8. Paris, M. Nony et C., 17 rue des Écoles, 1889-1890.
- Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*. Tomo III. Fasc. VI. Novembre-Dicembre, 1889.
- Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche* (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2^a, Vol. III, Fasc. 12. Dicembre, 1889.
- FAIFOFER (A.) — *Elementi di algebra ad uso degli Istituti tecnici* (1^o biennio) e dei Licei. 8^a edizione, migliorata. Venezia, Tipografia Emiliana, 1890. Prezzo L. 3.
- GIUDICE (F.) — *Geometria piana ad uso dei ginnasi e licei*. Palermo, Remo Sandron, editore, 1890. Prezzo L. 3.
- *Lezioni d'Algebra dette in un corso libero* (litografate). Palermo, 1888-89.
- GREMIGNI (M.) *Euclide. Libro sesto novamente esposto. Appendice sulla Misura delle Grandezze*. In Firenze, G. C. Sansoni, editore, 1889. Prezzo L. 1,50.
- DE LONGCHAMPS (G.) *Les fonctions pseudo, et hyper-bernoulliennes et leur premières applications. Contribution élémentaire à l'intégration des équations différentielles*. (Mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique, 1889).
- RAZZABONI (A.) — *Sulle rappresentazioni dello spazio sopra sè stesso che conservano le aree delle superficie corrispondenti*. (Rend. della R. Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna, 1889).
- TESSARI (D.) — *La Cinematica applicata alle macchine ad uso della Scuola di applicazione per gli ingegneri, degli ingegneri, e costruttori meccanici*. Torino, E. Loescher, 1890.
- TORELLI (G.) — *Su qualche proprietà degli integrali definiti trinomi che soddisfano all'equazione differenziale lineare di 2^o ordine illustrata da Gauss* (Memorie della Società italiana delle scienze, Napoli, 1889).

ERRATA-CORRIGE.

A p. 184, del Vol. IV, lin. 4, dal basso, in luogo di $\sqrt{\frac{3x}{2} \cdot 2x \left(2x + \frac{r}{4}\right) \left(2x - \frac{r}{4}\right)}$,
 leggasi: $\sqrt{\frac{3x}{2} \cdot \frac{x}{2} \left(\frac{x}{2} + \frac{r}{4}\right) \left(\frac{x}{2} - \frac{r}{4}\right)}$; stessa pagina a linea 2 in luogo
 di $x = \frac{r}{8} \sqrt{13}$, leggasi $x = \frac{7r}{2}$ ed a linea 1 ai tre valori riportati sostituisca: $\frac{13r}{4}$; $\frac{7r}{2}$; $\frac{15r}{4}$.

A pag. 191, linea 14, invece di $\sigma_m - \sqrt{N} < \frac{1}{\beta}$, leggasi: $\sigma_m - \sqrt{N} < \frac{1}{\beta^2}$.



SVILUPPO DI ARC. SEN X.

Una formula di trasformazione per arc. tg x

1. L'area del segmento, del cerchio di raggio 1, limitato da un diametro e dalla corda parallela che ha da esso distanza x è

$$x \cdot \sqrt{1-x^2} + \text{arc. sen } x.$$

Tal segmento è pure limite della somma dei rettangoli inscritti col tendere a zero dell'altezza d'ognuno: per ciò è

$$x \cdot \sqrt{1-x^2} + \text{arc. sen } x = \\ \lim_{n=\infty} \cdot \frac{2}{n} \cdot \left(1 + \sqrt{1-\frac{1}{n^2}} + \dots + \sqrt{1-\frac{m^2}{n^2}} \right)$$

dove n è variabile intera ed m esprime, per ogni valore di n , l'intero definito dalla

$$\frac{m}{n} \leq x < \frac{m+1}{n}.$$

Sviluppando i radicali del secondo membro della precedente uguaglianza, si ottiene

$$x \cdot \sqrt{1-x^2} + \text{arc. sen } x = \\ \lim \cdot \frac{2}{n} \cdot \left[1 + \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{n^4} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{n^6} - \dots \right) \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2}{n^2} - \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{m^4}{n^4} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{m^6}{n^6} - \dots \right) \right].$$

Sommando per colonne, si ottiene

$$x \cdot \sqrt{1-x^2} + \text{arc. sen } x = \\ \lim \cdot 2 \cdot \left(\frac{m}{n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1^2+2^2+\dots+m^2}{n^3} \cdot \frac{m^3}{n^3} - \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1^4+2^4+\dots+m^4}{n^5} \cdot \frac{m^5}{n^5} - \right. \\ \left. \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1^6+2^6+\dots+m^6}{n^7} \cdot \frac{m^7}{n^7} - \dots \right)$$

epperò, (V. BALTZER, Aritm. Gen., § 12).

$$x \cdot \sqrt{1-x^2} + \text{arc. sen } x = 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1.3}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} \cdot \frac{x^9}{9} - \dots \right)$$

per cui è

$$\begin{aligned} \text{arc. sen } x &= 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1.3}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} - \dots \right) - x \cdot \sqrt{1-x^2} \\ &= 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1.3}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} - \dots \right) \\ &\quad - \left(x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1.3}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} - \dots \right) \\ &= x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots \end{aligned}$$

Essendo

$$\text{arc. sen } (-x) = - \text{arc. sen } x$$

abbiamo così

$$\text{arc. sen } x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

dove deve essere

$$x^2 \leq 1$$

ed $\text{arc. sen } x$ indica l'arco, positivo o negativo, di minor lunghezza assoluta avente per seno x . Dal precedente sviluppo si può avere quello di $\text{arc. tg } x$ essendo

$$\text{arc. tg } x = \text{arc. sen } \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \text{arc. sen } \frac{2x}{1+x^2}.$$

2. Posto

$$\text{tg } y = x \quad \text{tg } y' = x'$$

si ha

$$\text{tg } (y + y') = \frac{\text{tg } y + \text{tg } y'}{1 - \text{tg } y \cdot \text{tg } y'} = \frac{x + x'}{1 - x \cdot x'}$$

da cui, essendo

$$y = \text{arc. tg } x \quad y' = \text{arc. tg } x'$$

si ricava

$$\text{arc. tg } x + \text{arc. tg } x' = \text{arc. tg } \frac{x + x'}{1 - x \cdot x'}.$$

Da questa si deduce immediatamente la relazione, utile in molti casi

$$\begin{aligned} \text{arc. tg } \frac{1}{a + (a^2 + 1) \cdot k} &= \text{arc. tg } \frac{1}{(a^2 + 1) \cdot k^2 + (a + 1)^2 \cdot k + (a + 1)} \\ &+ \text{arc. tg } \frac{1}{a + (a^2 + 1) \cdot (k + 1)}. \end{aligned}$$

Si ricava, p. es.,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \text{arc. tg } \frac{1}{2} + \text{arc. tg } \frac{1}{8} + \dots + \text{arc. tg } \frac{1}{2k^2} + \text{arc. tg } \frac{1}{1 + 2k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \text{arc. tg } \frac{1}{2 \cdot k^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{arc. tg } \frac{1}{n + (n^2 + 1) \cdot k} &= \\ \sum_{k=1}^k \text{arc. tg } \frac{1}{(n^2 + 1) \lambda^2 - (n - 1)^2 \cdot \lambda - n + 1} &+ \text{arc. tg } \frac{1}{n + (n^2 + 1) \cdot k} \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \text{arc. tg } \frac{1}{(n^2 + 1) \lambda^2 - (n - 1)^2 \cdot \lambda - n + 1}. \end{aligned}$$

Con un po' di pazienza, si possono dedurre formule convenienti quanto si desidera per il calcolo di π .

F. GIUDICE.

UN PROBLEMA D'ARITMETICA

(Continuazione e fine).

Prendansi ora per $u_0, u_1, \dots, u_n$ le potenze m^{esime} dei primi $n + 1$ numeri naturali: $1^m, 2^m, \dots, (n + 1)^m$, le quali, com'è noto (*), formano una *progressione aritmetica* d'ordine m , cioè sono tali che le loro differenze m^{esime} sono costanti ed uguali poi ad $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m$ e quindi le differenze degli ordini superiori tutte nulle.

(*) BALTZER. *Arit. generale*. § 23, 10.

Segue da ciò e dal teorema precedente che

$$\begin{aligned} \Delta^n u_0 &= (n+1)^m - \binom{n}{1} n^m + \binom{n}{2} (n-1)^m - \dots \\ &\dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{1} 2^m + (-1)^n 1^m, \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m &= (m+1)^m - \binom{m}{1} m^m + \binom{m}{2} (m-1)^m - \dots \\ &\dots + (-1)^{m-1} \binom{m}{1} 2^m + (-1)^m 1^m \end{aligned} \quad [3]$$

e che l'espressione

$$\begin{aligned} (n+1)^m - \binom{n}{1} n^m + \binom{n}{2} (n-1)^m - \dots \\ \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{1} 2^m + (-1)^n 1^m \end{aligned} \quad [4]$$

è uguale a zero tutte le volte che sia $n > m$.

In particolare posto $n = 5$, per $m = 4, 3, 2, 1$, si ha :

$$\begin{aligned} 6^4 - 5 \cdot 5^4 + 10 \cdot 4^4 - 10 \cdot 3^4 + 5 \cdot 2^4 - 1 &= 0, \\ 6^3 - 5 \cdot 5^3 + 10 \cdot 4^3 - 10 \cdot 3^3 + 5 \cdot 2^3 - 1 &= 0, \\ 6^2 - 5 \cdot 5^2 + 10 \cdot 4^2 - 10 \cdot 3^2 + 5 \cdot 2^2 - 1 &= 0, \\ 6 - 5 \cdot 5 + 10 \cdot 4 - 10 \cdot 3 + 5 \cdot 2 - 1 &= 0, \end{aligned}$$

com'è facile verificare.

Posto ciò si ammetta che la formola [1] rappresenti effettivamente quanti sieno i modi differenti in cui N può risolversi in m fattori coniugati, quando $m \leq n-1$, e dimostriamo che essa rappresenta questo numero di modi anche quando il numero dei fattori coniugati è $m+1$.

Procederemo come al n. 3. Moltiplicheremo cioè i numeri delle combinazioni di n elementi, ad 1 ad 1, a 2 a 2, ad $n-m$ ad $n-m$, ordinatamente per le espressioni

$$\begin{aligned} \frac{1}{[m-1]} \left\{ m^{n-2} - \binom{m-1}{1} (m-1)^{n-2} + \dots - (-1)^{m-1} \binom{m-1}{1} 2^{n-2} + (-1)^{m-1} \cdot 1^{n-2} \right\}, \\ \frac{1}{[m-1]} \left\{ m^{n-3} - \binom{m-1}{1} (m-1)^{n-3} + \dots - (-1)^{m-1} \binom{m-1}{1} 2^{n-3} + (-1)^{m-1} \cdot 1^{n-3} \right\}, \\ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \\ \frac{1}{[m-1]} \left\{ m^{m-1} - \binom{m-1}{1} (m-1)^{m-1} + \dots - (-1)^{m-1} \binom{m-1}{1} 2^{m-1} + (-1)^{m-1} \cdot 1^{m-1} \right\}, \end{aligned}$$

addizionando i prodotti ottenuti. La somma, ordinata per le verticali del precedente complesso di termini, prescindendo dal comun fattore

$$\frac{1}{|m-1|} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (m-1)}, \text{ è:}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \binom{n}{1} m^{n-2} + \binom{n}{2} m^{n-3} + \dots + \binom{n}{m} m^{m-1} \right\} \\ & - \binom{m-1}{1} \left\{ \binom{n}{1} (m-1)^{n-2} + \binom{n}{2} (m-1)^{n-3} + \dots + \binom{n}{m} (m-1)^{m-1} \right\} \\ & \dots \dots \dots \\ & - (-1)^{m-1} \binom{m-1}{1} \left\{ \binom{n}{1} 2^{n-2} + \binom{n}{2} 2^{n-3} + \dots + \binom{n}{m} 2^{m-1} \right\} \\ & + (-1)^{m-1} \left\{ \binom{n}{1} \cdot 1^{n-2} + \binom{n}{2} \cdot 1^{n-3} + \dots + \binom{n}{m} \cdot 1^{m-1} \right\}. \end{aligned}$$

Ma, pel teorema del binomio, si ha in generale

$$\begin{aligned} & \binom{n}{1} (m-h)^{n-2} + \binom{n}{2} (m-h)^{n-3} + \dots + \binom{n}{n-m} (m-h)^{m-1} = \\ & \frac{1}{m-h} \left\{ (m-h+1)^n - (m-h)^n - \binom{n}{m-1} (m-h)^{m-1} - \dots - \binom{n}{1} (m-h) - 1 \right\}, \end{aligned}$$

cosicchè facendo $h = 0, 1, \dots, m-1$ potrà darsi altra forma alle m espressioni entro le graffe.

Immaginando eseguita la trasformazione, poi effettuati i prodotti, finalmente addizionati, per colonna, i termini delle m linee che possono ottenersi, risulta:

$$\begin{aligned} & \frac{(m+1)^n}{m} - \binom{m-1}{1} \frac{m^n}{m-1} + \dots - (-1)^{m-1} \binom{m-1}{1} \frac{3^n}{2} + (-1)^{m-1} \frac{2^n}{1} \\ & - \frac{m^n}{m} + \binom{m-1}{1} \frac{(m-1)^n}{m-1} - \dots + (-1)^{m-1} \binom{m-1}{1} \frac{2^n}{2} - (-1)^{m-1} \frac{1^n}{1} \\ & - \binom{n}{m-1} \left\{ \frac{m^{m-1}}{m} - \binom{m-1}{1} \frac{(m-1)^{m-1}}{m-1} + \dots - (-1)^{m-1} \binom{m-1}{1} \frac{2^{m-1}}{2} + (-1)^{m-1} \frac{1^{m-1}}{1} \right\} \\ & \dots \dots \dots \\ & - \binom{n}{1} \left\{ \frac{m}{m} - \binom{m-1}{1} \frac{m-1}{m-1} + \dots - (-1)^{m-1} \binom{m-1}{1} \frac{2}{2} + (-1)^{m-1} \frac{1}{1} \right\} \\ & - \frac{1}{m} + \binom{m-1}{1} \frac{1}{m-1} - \dots + (-1)^{m-1} \binom{m-1}{1} \frac{1}{2} - (-1)^{m-1} \frac{1}{1}. \end{aligned}$$

Eseguito le riduzioni pei termini delle espressioni entro le graffe, si riconosce subito che le espressioni stesse sono della forma [4], e per esse è soddisfatta la condizione $n > m$, onde saranno tutte nulle e il complesso precedenti di termini si ridurrà, raccogliendo le potenze simili dei numeri naturali, a:

$$\begin{aligned} & \frac{(m+1)^n}{m} - \left\{ \frac{1}{m} + \binom{m-1}{1} \frac{1}{m-1} \right\} m^n + \\ & + \left\{ \binom{m-1}{1} \frac{1}{m-1} + \binom{m-1}{2} \frac{1}{m-2} \right\} (m-1)^n - \dots \\ & - (-1)^{m-1} \left\{ \binom{m-1}{2} \frac{1}{3} + \binom{m-1}{1} \frac{1}{2} \right\} \cdot 3^n + \quad [5] \\ & + (-1)^{m-1} \left\{ \binom{m-1}{1} \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \right\} \cdot 2^n - (-1)^{m-1} \cdot 1^n \\ & - \frac{1}{m} + \binom{m-1}{1} \frac{1}{m-1} - \binom{m-1}{2} \frac{1}{m-2} + \dots + (-1)^{m-1} \binom{m-1}{1} \frac{1}{2} - (-1)^{m-1} \cdot \frac{1}{1}. \end{aligned}$$

Quando poi si osservi che

$$\left\{ \binom{m-1}{h} \frac{1}{m-h} + \binom{m-1}{h+1} \frac{1}{m-h-1} \right\} (m-h)^n = \frac{m+1}{m} \binom{m}{h+1} (m-h)^{n-1} \quad [6]$$

e che i diversi termini delle quattro prime linee dell'espressione [5], eccettuati il primo ed ultimo, hanno la forma del 1° membro della [6] e sono per conseguenza esprimibili mediante il 2° membro, ponendo in esso successivamente $h = 0, 1, 2, \dots, (m-2)$ e ammettendo che il simbolo $\binom{m-1}{0}$ rappresenti l'unità, si concluderà che il numero di modi cercato, sempre prescindendo dal fattore $\frac{1}{m-1}$, è anche espresso da

$$\begin{aligned} & \frac{m+1}{m} \left\{ (m+1)^{n-1} - \binom{m}{1} m^{n-1} + \dots \right. \\ & \dots - (-1)^{m-1} \binom{m}{2} 3^{n-1} + (-1)^{m-1} \binom{m}{1} 2^{n-1} \left. \right\} \\ & - (-1)^{m-1} \cdot 1 - \frac{1}{m} + \binom{m-1}{1} \frac{1}{m-1} - \dots \quad [7] \\ & \dots + (-1)^{m-1} \binom{m-1}{1} \frac{1}{2} - (-1)^{m-1} \cdot \frac{1}{1}. \end{aligned}$$

Ora fermiamoci ad esaminare qual sia, in quest'espressione, la somma algebrica dei termini delle due ultime righe, le quali chiaramente possono anche scriversi

$$\begin{aligned} & (-1)^m \frac{m}{m} - \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \left\{ \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \dots \right. \\ & \left. \dots + (-1)^{m-1} \binom{m}{2} - (-1)^{m-1} \binom{m}{1} \right\}, \end{aligned} \quad [8]$$

distinguendo il caso di m *pari* ed m *dispari*. Nel primo caso il polinomio entro parentesi, che ha allora l'ultimo suo termine positivo, è uguale a 2, avendosi

$$(1 - 1)^m = 0^m = 1 - \left\{ \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \dots - \binom{m}{2} + \binom{m}{1} \right\} + 1;$$

e la [8] riducesi a

$$+ \frac{m}{m} - \frac{1}{m} + \frac{2}{m} = (-1)^m \frac{m+1}{m}.$$

Nel caso invece di m impari i termini in [8] entro parentesi sono due a due uguali e di segno contrario, talchè la [8] diviene

$$- \frac{m}{m} - \frac{1}{m} = (-1)^m \frac{m+1}{m}.$$

Per avere così il valore definitivo della [7] si dovrà in ogni caso aggiungere ai termini delle due prime righe la quantità $(-1)^m \frac{m+1}{m}$.

Rammentando adesso che in [7] fu ommesso il fattore $\frac{1}{1 \cdot 2 \dots (m-1)}$ ed osservando, analogamente a quanto si disse al n. 3, che con questo metodo di formazione dei singoli prodotti uno stesso prodotto viene a comparire $m+1$ volte, sarà da concludere che il numero dei modi in cui il numero N può risolversi in $m+1$ fattori coniugati è espresso dalla formola

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (m-1)} \left\{ (m+1)^{n-1} - \binom{m}{1} m^{n-1} + \dots \right. \\ & \left. \dots - (-1)^m \binom{m}{1} 2^{n-1} + (-1)^m \cdot 1^{n-1} \right\} \end{aligned}$$

che può dedursi dalla [1] ponendo $m + 1$ in luogo di m . E poichè la [1] fu dimostrata vera per $m = 3$, così, quando sia $m \leq n$, essa è vera sempre.

Risulta poi senz' altro la regola seguente:

Il numero dei modi differenti ne' quali un numero $N = a_1 a_2 \dots a_n$, dove $a_1, a_2, \dots, a_n$, sono fattori primi diversi, può risolversi nel prodotto di m fattori coniugati, si ottiene moltiplicando le potenze $n - 1^{\text{esimo}}$ dei primi m numeri naturali $1, 2, \dots, m$ per i coefficienti dei termini della potenza $m - 1^{\text{esima}}$ del binomio, alternativamente cambiati di segno, incominciando col $+$ se m è dispari, col $-$ se m è pari, poi dividendo il numero ottenuto per $1 \cdot 2 \dots (m - 1)$.

Volendo poi considerare anche il caso in cui uno dei fattori sia la unità, come può talvolta occorrere, al numero espresso dalla formola [1], per un dato valore di m , conviene aggiungere quello che si ha dalla stessa formola sostituendo $m - 1$ ad m .

6. Possiamo poi osservare, a verifica del risultato ottenuto, che per la formola [3], questo numero di modi, com'è naturale, uguaglia l'unità tutte le volte che $m = n$.

7. Se il numero N anzichè della forma $a_1 a_2 \dots a_n$ fosse uguale ad $a_1^\alpha a_2^\beta \dots a_n^\nu$, dove $a_1, a_2, \dots, a_n$ stanno sempre a rappresentare numeri primi diversi, poichè due fattori coniugati che debbono essere primi fra loro non possono contenere la stessa lettera, si ha che il numero dei modi nei quali il nuovo numero è scomponibile in m fattori coniugati primi fra loro, è ugualmente ottenibile applicando la regola del n. 5.

Così ad es. il numero $232848 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 11$ è risolvibile in un prodotto di 3 fattori coniugati *primi fra loro* in

$$\frac{1^3 - 2 \cdot 2^3 + 3^3}{1 \cdot 2} = 6$$

modi differenti, escluso il caso del fattore 1.

Questi prodotti sono poi

$$\begin{aligned} (2^4 \cdot 3^3) \cdot 7^2 \cdot 11 &= 432 \cdot 49 \cdot 11; & (2^4 \cdot 7^2) \cdot 3^3 \cdot 11 &= 784 \cdot 27 \cdot 11; \\ (2^4 \cdot 11) \cdot 3^3 \cdot 7^2 &= 176 \cdot 27 \cdot 49; & (3^3 \cdot 7^2) \cdot 2^4 \cdot 11 &= 1323 \cdot 16 \cdot 11; \\ (3^3 \cdot 11) \cdot 2^4 \cdot 7^2 &= 297 \cdot 16 \cdot 49; & (7^2 \cdot 11) \cdot 2^4 \cdot 3^3 &= 539 \cdot 16 \cdot 27. \end{aligned}$$

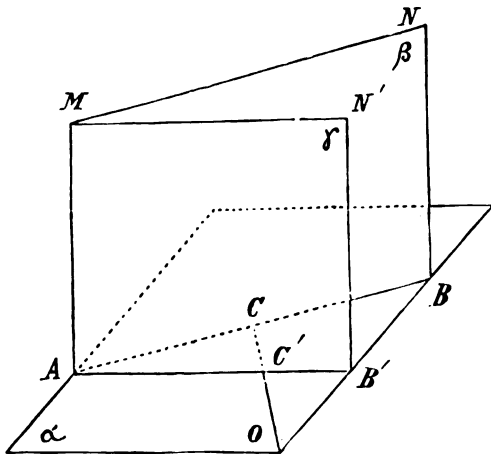
UNA OSSERVAZIONE

RELATIVA AD ALCUNE QUISTIONI DI PROBABILITÀ

Il Sig. BERTRAND nella sua opera *Calcul des probabilités* (Paris, Gauthier-Villars, 1889) mette in guardia il lettore contro gli errori nei quali si può incorrere applicando il concetto ordinario di probabilità al caso in cui il numero delle sorti è infinito, e porta quattro esempi, uno aritmetico e tre geometrici, a confermare le sue osservazioni. Mi pare non inutile aggiungere il seguente molto semplice.

In un piano orizzontale α abbiassi un segmento AB , e sia C il suo punto di mezzo. Per la retta AB si conduca un piano verticale β e siano AM , BN le verticali dei punti A , B . Se si fa cadere nella striscia (AM , BN) un punto pesante P , in modo che la caduta sia rimessa al caso, la probabilità che P cada in AC è uguale ad $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$.

Facciamo ora una proiezione centrale da un centro O , situato nel piano α , sopra un piano γ passante per AM , e sia AB' la proiezione di AB , $B'N'$ quella di BN , C' quella di C e P' quella di P . Il rimettere al caso la caduta di P nella striscia (AM , BN) equivale a rimettere al caso quello della proiezione P' nella striscia (AM , $B'N'$), e la probabilità che si veda la imagine P' cadere in AC' , espressa dal rapporto $\frac{AC'}{AB'}$,



non si può più prendere sempre uguale ad $\frac{1}{2}$ ma può acquistare infiniti valori differenti facendo solo variare la posizione dell'occhio.

La proiezione centrale porterebbe parimente a fare osservazioni analoghe nel caso in cui invece di segmenti si trattasse di aree.

Non è dunque sempre permesso, neppure in casi molto semplici, quando il numero delle sorti è infinito, sostituire alla considerazione di un caso quella di un altro, in cui le sorti possibili e le favorevoli corrispondono una ad una a quelle del primo.

Aggiungerò anche l'osservazione seguente.

A rappresentare le forme possibili di triangolo si possono prendere, invece dei punti interni ad un triangolo equilatero (V. CESÀRO, Volume XXIV del Giornale di Battaglini, 1886: *La rottura del diamante*, e MURER, Anno IV di questo Periodico, 1889, pag. 161: *Dei poligoni che corrispondono ai triangoli rettangoli ed agli acutangoli ed alcune quistioni relative di probabilità*), i punti P interni ad un triangolo qualunque ABC , facendo corrispondere ai possibili angoli le superficie dei triangoli PBC , PCA , PAB la cui somma è uguale alla superficie ABC , che si fa allora corrispondere all'angolo di due retti. In tal modo si troverebbe facilmente che la cosiddetta probabilità che un triangolo formato a caso sia isoscele sta a quella che esso sia rettangolo non come $\sqrt{3} : 1$ (V. la nota citata del MURER), ma come

$$(m + m' + m'') : p,$$

essendo m , m' , m'' le mediane e p il semiperimetro del triangolo.

S. RINDI.

ALCUNE FORMOLE RELATIVE AL TRIANGOLO

1. Sia ABC un triangolo. Conducansi le altezze $AA' = h$, $BB' = h'$, $CC' = h''$ e si descriva il triangolo $A'B'C'$, del quale, com'è noto, le AA' , BB' , CC' sono bisettrici degli angoli interni, e siano A'' , B'' , C'' i punti in cui queste incontrano $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ e D , E , F quelli in cui incontrano il cerchio circoscritto ad ABC .

Pongasi $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $B'C' = a'$, $C'A' = b'$, $A'B' = c'$; $A'A'' = \alpha$, $B'B'' = \beta$, $C'C'' = \gamma$; $A'D = d$, $B'E = e$, $C'F = f$ e siano R , r , R' , r' i raggi dei cerchi rispettivamente circoscritti ed inscritti dei triangoli $ABC = \Delta$, $A'B'C' = \Delta'$.

Se O è il punto in cui s'intersecano le tre altezze del triangolo ABC , si ha

$$\begin{aligned}AO &= m = 2R \cos A, \quad BO = n = 2R \cos B, \quad CO = p = 2R \cos C, \\A'O &= g = 2R \cos B \cos C, \quad B'O = i = 2R \cos C \cos A, \\C'O &= l = 2R \cos A \cos B, \\a' &= R \sin 2A, \quad b' = R \sin 2B, \quad c' = R \sin 2C, \\ \Delta' : \Delta &= 2 \cos A \cos B \cos C = r' : R \quad (*).\end{aligned}$$

Mostreremo ora che fra i diversi elementi precedentemente notati esistono altre relazioni non prive affatto d'interesse.

2. Si ha intanto $a' = R \sin 2A = 2R \sin A \cos A$, onde:

$$[1] \quad a' = a \cos A, \quad b' = b \cos B, \quad c' = c \cos C.$$

Inoltre poichè $\Delta = \frac{R}{r'} \cdot \Delta'$ ed è $2\Delta' = (a' + b' + c') r'$, segue:

$$[2] \quad 2\Delta = (a' + b' + c') \cdot R$$

ed anche

$$\begin{aligned}2\Delta &= R(a \cos A + b \cos B + c \cos C) = \\&= R^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)\end{aligned}$$

e poichè il fattore fra parentesi, com'è noto, è $= 4 \sin A \sin B \sin C$, infine

$$[3] \quad \Delta = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = Rr' \cdot \tan A \tan B \tan C.$$

Dalla relazione:

$$\Delta' : \Delta = 2 \cos A \cos B \cos C$$

e dall'essere $\Delta' = \frac{a' b' c'}{4R'}$ e $\Delta = \frac{abc}{4R}$, deducesi

$$\frac{a' b' c'}{abc} \cdot \frac{R}{R'} = 2 \cos A \cos B \cos C = \frac{2 a' b' c'}{abc},$$

onde

$$[4] \quad R = 2R'.$$

3. Si ha: $d = B.A' \cdot \cot C = c \cos B \cot C = 2R \cos B \cos C = g$,
quindi:

$$[5] \quad \frac{a}{g} + \frac{b}{i} + \frac{c}{l} = \frac{a}{d} + \frac{b}{e} + \frac{c}{f} =$$

$$\frac{\frac{\text{sen } A}{\cos B \cos C} + \frac{\text{sen } B}{\cos C \cos A} + \frac{\text{sen } C}{\cos A \cos B}}{\frac{\text{sen } 2A + \text{sen } 2B + \text{sen } 2C}{2 \cos A \cos B \cos C}} = 2 \tan A \tan B \tan C.$$

Inoltre evidentemente

$$[6] \quad ma + nb + pc = 2R \left\{ a \cos A + b \cos B + c \cos C \right\} =$$

$$2R (a' + b' + c') = 4\Delta.$$

$$[7] \quad ail + blg + cgi =$$

$$4R^2 \cos A \cos B \cos C \left\{ a \cos A + b \cos B + c \cos C \right\} =$$

$$4\Delta r' = 4R\Delta';$$

$$[8] \quad mnp = 8R^3 \cos A \cos B \cos C = 4R^2 r' =$$

$$4R \cdot \Delta \cdot \cot A \cot B \cot C = abc \cot A \cot B \cot C;$$

$$[9] \quad anp + bpm + cmn =$$

$$4R^2 \left\{ a \cos B \cos C + b \cos C \cos A + c \cos A \cos B \right\} =$$

$$8R^3 \left\{ \text{sen } A \cos B \cos C + \text{sen } B \cos C \cos A + \text{sen } C \cos A \cos B \right\} =$$

$$8R^3 \text{sen } A \text{sen } B \text{sen } C = abc,$$

per essere $\sum \text{sen } A \cos B \cos C = \text{sen } A \text{sen } B \text{sen } C$.

$$[10] \quad \frac{g}{h} + \frac{i}{h'} + \frac{l}{h''} = \frac{\cos B \cos C}{\text{sen } B \text{sen } C} + \frac{\cos C \cos A}{\text{sen } C \text{sen } A} + \frac{\cos A \cos B}{\text{sen } A \text{sen } B} = 1.$$

$$[11] \quad \frac{m}{h} + \frac{n}{h'} + \frac{p}{h''} = \frac{\cos A}{\text{sen } B \text{sen } C} + \frac{\cos B}{\text{sen } C \text{sen } A} + \frac{\cos C}{\text{sen } A \text{sen } B} = 2.$$

$$[12] \quad hh'h'' = \frac{1}{2} (mh'h'' + nh''h + ph'h') = \Delta \cdot (a' + b' + c').$$

$$[13] \quad \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = 1 + 4 \cdot \frac{a' + b' + c'}{a + b + c}.$$

Infatti:

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = \cos A + \cos B + \cos C =$$

$$1 + 4 \operatorname{sen} \frac{1}{2} A \operatorname{sen} \frac{1}{2} B \operatorname{sen} \frac{1}{2} C,$$

per una formola nota di trigonometria, e

$$\begin{aligned} 1 + 4 \cdot \frac{a' + b' + c'}{a + b + c} &= 1 + 4 \cdot \frac{\operatorname{sen} A \cos A + \operatorname{sen} B \cos B + \operatorname{sen} C \cos C}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C} \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C} = 1 + 2 \cdot \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C} \\ &= 1 + 4 \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{2} A \operatorname{sen} \frac{1}{2} B \operatorname{sen} \frac{1}{2} C, \end{aligned}$$

dove si è fatto uso della relazione:

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = 4 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C.$$

$$[14] \quad a \cdot \operatorname{sen} (BA A' - CA A') + b \cdot \operatorname{sen} (CB B' - AB B') + \\ c \cdot \operatorname{sen} (AC C' - BC C') = 0.$$

Infatti il primo membro è uguale ad

$$a \cdot \operatorname{sen} (C - B) + b \cdot \operatorname{sen} (A - C) + c \cdot \operatorname{sen} (B - A) = \\ 2R \left\{ \operatorname{sen} A \operatorname{sen} (C - B) + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} (A - C) + \operatorname{sen} C \operatorname{sen} (B - A) \right\} = 0.$$

4. Chiamando O' il centro del cerchio inscritto nel triangolo ABC , dal triangolo $OB O'$, si ha:

$$\begin{aligned} \overline{OO'}^2 &= \overline{OB}^2 + \overline{O'B}^2 - 2 OB \cdot O'B \cos OB O' = \\ &= 4 R^2 \cos^2 B + R^2 - 4 R^2 \cos B \cos OB O'. \end{aligned}$$

Ma si ha: $\cos OB O' = \cos (OBC - O'BC) = \cos B'BC \cos O'BC + \operatorname{sen} B'BC \operatorname{sen} O'BC = \operatorname{sen} C \operatorname{sen} A + \cos C \cos A = \cos (A - C)$, quindi

$$[15] \quad \overline{OO'}^2 = R^2 - 4 R^2 \cos B \left[\cos (A - C) - \cos B \right] = \\ R^2 - 8 R^2 \cos A \cos B \cos C = R (R - 4 r') = 4 R' (R' - 2 r').$$

Considerando infine i triangoli $AB'C'$, $A'B'C'$, aventi la stessa base, abbiamo che $AB'C' : A'B'C' = AA'' : A'A''$. Ma

$$[16] \quad 2.A'B'C' = a' . A C' . \text{sen } A C' B' = a' . b \cos A \cos C A A' = \\ a' b \cos A . \frac{h}{b} = a h \cos^2 A = 2 \Delta . \cos^2 A,$$

onde: $A A'' : A'' A' = \Delta . \cos^2 A : \Delta'$. Ma $A' A'' = \alpha'$, $A A'' = h - \alpha'$,
epperciò:

$$[17] \quad \frac{h - \alpha'}{\alpha'} : \frac{h - \beta'}{\beta'} : \frac{h - \gamma'}{\gamma'} = \cos^2 A : \cos^2 B : \cos^2 C.$$

D. GAMBOLI.

SULL' INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

NELLE SCUOLE CLASSICHE

La matematica è per gli alunni delle scuole secondarie classiche uno degli scogli più ardui a superare, più di quello che non sia lo stesso greco, il quale se poco si studia, se ne deve cercare la causa, più nella poca persuasione che gli alunni e le famiglie hanno della utilità di questo insegnamento, anzichè nella difficoltà intrinseca della materia. L'utilità della matematica invece non è messa in dubbio da alcuno, appena appena qualche genitore alla vigilia dell'esame farà timidamente osservare al professore, che il suo figliolo vuole studiar Legge e quindi che sul suo sapere riguardo alla matematica si potrà non essere tanto esigenti. La difficoltà e il poco profitto qui derivano tutti dalla natura della scienza stessa, alla quale i giovani si sentono in generale poco inclinati perchè per ascoltare con profitto ogni lezione occorre uno sforzo notevole della mente, una continua riflessione, uno studio assiduo, un esercizio continuo, ed è assolutamente necessario che l'alunno abbia sempre presente tutto quello che prima ha studiato. — In questi studi una piccola interruzione, un momento di distrazione, fanno sì che lo scolare trovi subito gravi difficoltà a seguire il maestro, e se non è dotato di buona volontà, che l'aiuti a riparare prontamente alla momentanea deficienza, esse si accumulano in breve e viene presto il

giorno in cui il giovane se ne trova avvolto come in una rete intricatissima della quale non saprà liberarsi, perchè gli manca il tempo di riprendere lo studio metodico ed ordinato della materia fin dai primordi; e se anche lo assiste il buon proposito di mantenersi in corrente, al maestro che l'interrogherà dovrà rispondere: che sebbene abbia studiato tanto, non ha potuto capire. Una volta che il giovane sia convinto che *la matematica non la capisce*, è inutile ogni esortazione, ogni ammonizione perchè ne coltivi lo studio con amore; nella migliore ipotesi non se ne occuperà che quel tanto da poter mostrare all'insegnante che *ha fatto quanto ha potuto*, sperando che il professore, convinto di ciò, lo tratti con indulgenza e gliene tenga conto il giorno dell'esame. Del resto a che mai è ora ridotto l'esame di matematica nel Ginnasio e nel Liceo? Abolito, o quasi, l'esame scritto; che criterio dell'istruzione di un giovane può dare la sola prova orale? A questa è assegnato un limite minimo di quindici minuti per la licenza, di dieci per la promozione; è difficile, per la buona distribuzione degli esami, che questo limite possa essere superato, dal momento che in molti licei le commissioni esaminatrici sono occupate tutto il mese di luglio anche sedendo le otto e dieci ore al giorno, e nell'ottobre debbono affrettarsi per poter riprendere le lezioni il giorno fissato. Nei quindici minuti è quindi necessario: preparare la figura, scrivere le formule algebriche, correggere gli errori che il candidato commette, che per poter andare innanzi non si possono lasciar passare in silenzio. Queste cose, insieme ad altri piccoli perditempi inevitabili, minaccerebbero di assorbire tutto il tempo disponibile, se per evitare ogni complicazione non si riducesse l'esame a domandare qualche definizione, a far eseguire qualche operazione, a far dimostrare qualche teorema semplicissimo.

D'altra parte colle disposizioni che attualmente regolano l'insegnamento secondario, la matematica sembra che sia stata messa affatto in seconda linea, e mentre una volta teneva colle lettere il primo posto, ora trovasi in condizioni tanto difficili da far temere che il profitto diventi pressochè nullo.

Infatti per cominciare fino dalle prime tre classi del ginnasio, mentre cogli ordinamenti entrati in vigore nel 1870, e che durarono con leggere modificazioni fino al 1883, erano assegnate due ore di

aritmetica pratica per settimana e per classe, ora queste due ore sono divise fra l'aritmetica e le nozioni di scienze naturali. La maggior parte di questo tempo non resterà certo all'aritmetica, perchè le nozioni di scienze naturali essendo cosa affatto nuova per questi scolari e comprendendo un programma abbastanza vasto, dovranno prendere il maggior numero di lezioni. Per l'aritmetica basterà accontentarsi di assegnare gli esercizi di casa che il regolamento prescrive, e non resterà molto tempo per farne in iscuola una correzione a viva voce, assai più efficace di quella fatta segnando gli errori sulle pagine presentate, essendo molto dubbio che i giovanetti ritornino sul lavoro fatto per correggerne gli errori. Non sarà quindi possibile assicurarsi se gli alunni hanno lavorato del loro, e per poco che la scuola sia numerosa la maggior parte di essi potrà impunemente farsi fare da altri il compito di casa; e l'insegnante che correggerà questi temi potrebbe credere, se l'esperienza non l'ammaestrasse, che i suoi alunni sieno espertissimi nel calcolo numerico e nella soluzione dei problemi, mentre in realtà, quando saranno giunti alla fine della terza ginnasiale, dell'aritmetica avranno dimenticato la maggior parte di quanto ne sapevano uscendo dalle scuole elementari. — Anche la disposizione del nuovo regolamento, che in tutti gli esami del ginnasio inferiore l'aritmetica e le nozioni di scienze naturali costituiscano una sola prova, e quindi sia uno solo il punto di merito che esprima il profitto complessivo nei due rami di insegnamento, è tutto a scapito dell'aritmetica. Poichè i giovanetti, e per la novità dell'insegnamento e per le sue maggiori attrattive, daranno certamente la preferenza allo studio delle nozioni di scienze naturali e potranno col buon profitto in questo ramo riparare alla deficienza nell'aritmetica, senza che si veda come una cosa possa supplire all'altra.

Al Ginnasio superiore, sempre cogli ordinamenti del 1870, erano assegnate sei ore settimanali, tre per classe, pel solo insegnamento dell'Aritmetica ragionata. Era questo un tempo sufficiente allo scopo, ma non eccessivo, perchè l'Aritmetica ragionata è forse la parte più difficile della matematica elementare e per ottenere qualche risultato bisogna insistere, insistere molto su ogni dimostrazione, e non bisogna tralasciare gli esercizi, perchè non succeda che imparando l'Aritmetica

ragionata gli alunni scordino la Tavola pitagorica. Ora nel Ginnasio sono riserbate solo due ore settimanali per classe, e queste per insegnare non solo l'Aritmetica ragionata (di cui il programma è quasi sempre il medesimo, giacchè difficile sarebbe diminuirlo), ma anche il primo libro degli Elementi di Geometria dell'Euclide. Come si potrà fare a svolgere in modo proficuo il programma in quel tempo? Sarà necessario sorvolare su tutto, limitarsi alle nozioni più semplici, ridurre la materia allo stato di scheletro, fare pochissime ripetizioni, interrogare appena quel tanto che è necessario per poter segnare per ciascun alunno un punto di merito per la votazione bimestrale. Di assegnare esercizi scritti in iscuola non si parlerà neppure, perchè come si potrebbe in tanta angustia di tempo, sacrificare per essi qualche ora di lezione? Dei compiti di casa non se ne potrà fare in iscuola che una correzione sommaria, senza potersi assicurare della loro autenticità. E poi, dal momento che è abolita la prova scritta d'Aritmetica nella licenza ginnasiale, come far entrare nei giovani la convinzione che la matematica non si può imparare, se non esercitandoli con temi scritti, sinceramente fatti e senza aiuto, allo sforzo necessario a trovare da sè le relazioni fra i termini di un problema, o la ragione necessaria di un teorema?

La matematica non si impara con un semplice sforzo di memoria, ed anche per poter ricostruire la dimostrazione di un teorema o la soluzione di un problema spiegati dal maestro è indispensabile che il giovane sappia lì per lì scoprire quei legami logici che ne segnano la via, ed in questo non potrà divenire esperto se non con continui esercizi.

(*Continua*).

DEMETRIO VALERI.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI

b), 28, 37, 43, 45, 47 e 50

b). Il luogo dei punti, del piano di un triangolo dato, tali che i piedi delle perpendicolari, condotte da uno qualunque di essi ai tre lati, formino un triangolo di data area, è una circonferenza concentrica a quella circoscritta al triangolo dato. (G. LORIA).

Dimostrazione del Prof. F. Viaggi. (*)

Sieno O , R centro e raggio del cerchio circoscritto al triangolo ABC ; M un punto qualunque del suo piano, $MO = R_1$, ed A', B', C' i piedi delle perpendicolari condotte ai suoi lati da M .

Il quadrangolo $MB'A'C'$ è inscrittibile nel cerchio di diametro MA ; in esso e nel cerchio ABC le corde $B'C'$ e BC tagliano archi simili, quindi sono proporzionali ai diametri; dalla quale osservazione, estesa agli altri quadrangoli inscrittibili che si presentano nella figura, si deducono le relazioni

$$2R \cdot B'C' = a \cdot MA, \quad 2R \cdot C'A' = b \cdot MB, \quad 2R \cdot A'B' = c \cdot MC. \quad [1]$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè A', B', C' sieno in linea retta, nel quale caso formano un triangolo d'area nulla, è che uno dei segmenti $A'B', B'C', C'A'$ eguagli la somma degli altri due, ossia, per le [1], che uno dei rettangoli $a \cdot MA, b \cdot MB, c \cdot MC$ eguagli la somma degli altri due, e quindi (pel teorema di Tolomeo) che M sia sul circolo ABC : e questo forma il teorema di SIMSON.

Sia δ l'area del triangolo $A'B'C'$; esprimendo l'area in funzione dei lati e ricorrendo alle [1], si ha

$$256 R^4 \delta^2 = -a^4 \cdot \overline{MA}^4 - b^4 \cdot \overline{MB}^4 - c^4 \cdot \overline{MC}^4 + 2a^2 b^2 \cdot \overline{MA}^2 \cdot \overline{MB}^2 + \dots \quad [2]$$

Si costruisca la circonferenza di centro O e che passi per M ; essa incontri in A_1, B_1, C_1 le direzioni OA, OB, OC : la formola [2] relativa alle proiezioni di M sui lati del triangolo $A_1 B_1 C_1$, i cui lati sono proporzionali ad a, b, c , pel teorema di SIMSON, dà luogo alla seguente:

$$-a^4 \cdot \overline{MA_1}^4 - b^4 \cdot \overline{MB_1}^4 - c^4 \cdot \overline{MC_1}^4 + 2a^2 b^2 \cdot \overline{MA_1}^2 \cdot \overline{MB_1}^2 + \dots = 0. \quad [3]$$

Sia Δ l'area del triangolo ABC ; e suppongasì, per fissare le idee, che M sia interno all'angolo $B_1 A_1 C_1$ del triangolo, epperò $MA_1 \cdot B_1 C_1 = MB_1 \cdot C_1 A_1 + MC_1 \cdot A_1 B_1$, perciò

(*) Altre dimostrazioni pervennero dal Sigg. Prof. S. Catania, S. Gatti, F. Palatini, L. Mariscotti, G. Russo.

$$\begin{aligned} & \overline{B_1 C_1^2} \left(-\overline{MA_1^2} \cdot \overline{B_1 C_1^2} + \overline{MB_1^2} \cdot \overline{C_1 A_1^2} + \overline{MC_1^2} \cdot \overline{A_1 B_1^2} \right) = \\ & - 2 \left(A_1 B_1 \cdot B_1 C_1 \cdot C_1 A_1 \right) \cdot \left(M B_1 \cdot M C_1 \cdot B_1 C_1 \right) = \\ & - 32 \left(A_1 B_1 C_1 \right) \cdot \left(M B_1 C_1 \right) R_1^2 \end{aligned}$$

e le altre due relazioni che si deducono dalla precedente con cambiamento di lettere e prendendo positivo l'ultimo membro: dalle dette relazioni, nelle quali $A_1 B_1$, $B_1 C_1$, $C_1 A_1$ si esprimano in funzione di c , a , b , R_1 , R , si deduce:

$$\begin{aligned} & a^2 \left(-a^2 \cdot \overline{MA_1^2} + b^2 \cdot \overline{MB_1^2} + c^2 \cdot \overline{MC_1^2} \right) + b^2 \left(a^2 \cdot \overline{MA_1^2} - b^2 \cdot \overline{MB_1^2} + c^2 \cdot \overline{MC_1^2} \right) + \\ & c^2 \left(a^2 \cdot \overline{MA_1^2} + b^2 \cdot \overline{MB_1^2} - c^2 \cdot \overline{MC_1^2} \right) = 32 \cdot \frac{R^4}{R_1^2} \left(A_1 B_1 C_1 \right)^2 = 32 R_1^2 \Delta^2 \quad [4] \end{aligned}$$

Fra i quadrati dei segmenti MO , MA , MA_1 uscenti da M , e le distanze dei loro estremi, che sono in linea retta, sussiste la relazione

$$\overline{MA^2} = \frac{R}{R_1} \overline{MA_1^2} + (R_1 - R)^2$$

per mezzo di questa e delle due analoghe, elimino MA , MB , MC dalla [2];

e, riduzion fatta, come coefficiente di $\left(\frac{R}{R_1} \right)^2$ comparirà il 1° membro della [3],

come coefficiente di $\frac{2 R (R_1 - R)^2}{R_1}$ comparirà il 1° membro della [4] e come coefficiente di $(R_1 - R)^4$ il quadrato del quadruplo dell'area ABC ; dunque si ha:

$$256 R^4 \delta^2 = 64 R R_1 (R_1 - R)^2 \Delta^2 + 16 (R_1 - R)^4 \Delta^2$$

dalla quale

$$\delta = \pm \frac{R_1^2 - R^2}{4 R^2} \Delta \quad [5]$$

ed anche

$$R_1 = R \sqrt{1 \pm \frac{4 \delta}{\Delta}}. \quad [6]$$

Ora se M si muove nel piano su di una circonferenza di centro O , essendo R_1 costante la formola [5], nella quale sceglieremo il segno in modo da rendere positivo il 2° membro, prova che δ è costante; e, se δ si mantiene costante, dalla [6] si deduce che M muovesi su due circonferenze di centro O , e di queste una può mancare o ridursi al punto O se $\delta \geq \frac{\Delta}{4}$.

La formola [5] che può scriversi così:

$$4 (A' B' C') = \pm (A_1 B_1 C_1 - A B C)$$

suggerisce una costruzione molto semplice per ottenere il luogo quando sia data l'area di $A' B' C'$.

28*. Se da un punto, interno ad un poligono equilatero, si guidano segmenti terminati ai lati, uno per ciascun lato, e tutti egualmente inclinati sui rispettivi lati, la somma di tutti questi segmenti è indipendente dalla posizione di quel punto, e, per un dato poligono, essa è minima quando i segmenti sono perpendicolari ai rispettivi lati. (D. Besso).

Dimostrazione del Sig. C. Aiello, alunno del R. Liceo V. E di Napoli.

Sia n il numero dei lati del poligono, l la lunghezza di ciascun lato. Nell'interno del poligono prendansi due punti O, O_1 e si conducano da questi, innanzi tutto, le perpendicolari $a_1, a_2, \dots, a_n$; $b_1, b_2, \dots, b_n$ ai rispettivi lati. Congiungendo O ed O_1 coi vertici del poligono, questo resta diviso in due classi di triangoli, quelli che hanno vertice comune in O e quelli che hanno tutti il vertice in O_1 . Esprimendo che la doppia somma delle aree dei triangoli della prima serie uguaglia quella delle aree dei restanti triangoli, equivalendo ambedue al doppio dell'area del poligono dato, si ha l'eguaglianza:

$$la_1 + la_2 + \dots + la_n = lb_1 + lb_2 + \dots + lb_n,$$

da cui, dividendo per l , deducesi:

$$[1] \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n.$$

Conducansi ora per O ed O_1 , rispettivamente, i segmenti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ e $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ ugualmente inclinati sui lati del poligono per un angolo che si suppone non retto. I segmenti α e β insieme coi segmenti a e b e coi lati del poligono, determinano dei triangoli rettangoli tutti simili, per avere uno stesso angolo acuto. Segue da ciò che

$$\frac{\alpha_1}{a_1} = \frac{\alpha_2}{a_2} = \dots = \frac{\alpha_n}{a_n} = \frac{\beta_1}{b_1} = \frac{\beta_2}{b_2} = \dots = \frac{\beta_n}{b_n}$$

e quindi

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \frac{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

Ma per la [1] essendo eguali i denominatori dei due membri, saranno uguali anche i numeratori, onde

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$$

e così la somma dei segmenti α è indipendente dalla scelta del punto O , c. d. d.

Essendo poi $\alpha_1 > a_1, \alpha_2 > a_2, \dots, \alpha_n > a_n$ segue che la somma delle α è minima quando i segmenti considerati sono perpendicolari ai lati.

Dimostrazione del Sig. G. D'Asdia, alunno del R. Istituto tecnico di Girgenti.

Se l rappresenta la misura del lato del poligono di n lati, O un punto interno qualsiasi del medesimo, α l'angolo costante che i diversi segmenti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tirati da O e terminati ai lati, formano coi lati stessi, l'area di uno qualunque dei triangoli che si ottengono congiungendo O coi vertici del

poligono, sarà evidentemente $\frac{1}{2} la_i \sin \alpha$, onde si avrà l'eguaglianza

$$S = \frac{1}{2} \left\{ la_1 \sin \alpha + la_2 \sin \alpha + \dots + la_n \sin \alpha \right\} = \frac{1}{2} l \sin \alpha \cdot \Sigma a,$$

dove S rappresenta l'area del poligono. Di qui ricavasi

$$\Sigma a = \frac{2S}{l \sin \alpha}$$

e poichè S , l ed α sono costanti così la somma dei segmenti a è indipendente dalla posizione di O .

37*. *Trovare il resto della divisione per 13 di 7^{100} .* (A. LUGLI).

Soluzione del Sig. P. Marano, studente privato a Catania.

Applicando alle successive potenze di 7, ciascuna considerata come il prodotto della precedente per 7, il teorema che se due numeri si dividono per lo stesso divisore, il prodotto dei numeri dati e il prodotto dei resti divisi per questo divisore danno resti uguali, si avrà:

$$\begin{aligned} 7 &= \text{mul. } 13 + 7, & 7^2 &= \text{m. } 13 + 10, & 7^3 &= \text{m. } 13 + 5, \\ 7^4 &= \text{m. } 13 + 9, & 7^5 &= \text{m. } 13 + 11, & 7^6 &= \text{m. } 13 + 12, \\ 7^7 &= \text{m. } 13 + 6, & 7^8 &= \text{m. } 13 + 3, & 7^9 &= \text{m. } 13 + 8, \\ 7^{10} &= \text{m. } 13 + 4, & 7^{11} &= \text{m. } 13 + 2, & 7^{12} &= \text{m. } 13 + 1. \end{aligned}$$

Ed ora analogamente ogni potenza di 7^{12} divisa per 13 darà per resto 1 ed avendosi $100 = 12 \cdot 8 + 4$, il resto della divisione di 7^{100} per 13 sarà quello stesso di 7^4 , ossia 9 (*).

43*. *Dei tre quadrati inscritti in un triangolo il maggiore è quello che appoggia al lato minore. — La proposizione ammette eccezioni?* (A. LUGLI).

Dimostrazione del Sig. C. Aiello, alunno del R. Liceo V. E. di Napoli.

Indicando con a, b, c i lati del triangolo, con h, h', h'' le altezze relative, i lati dei quadrati inscritti nel triangolo e insistenti sui lati a, b sono, com'è noto: $\frac{ah}{a+h}, \frac{bh'}{b+h'}$. Si noti che i prodotti ah, bh' sono uguali, esprimendo il doppio dell'area del triangolo, cosicchè se supponesi $a < b$ sarà da dimostrare che $b+h' > a+h$. A tal uopo si osservi che si ha:

$$b+h' = b + \frac{ah}{b} = \frac{b^2 + ah}{b}; \quad a+h = \frac{ab + bh}{b}.$$

Sottraendo si ricava:

$$(b+h') - (a+h) = \frac{b(b-a) + h(a-b)}{b} = \frac{(b-h)(b-a)}{b}.$$

(*) Analoga soluzione pervenne dal Sig. P. Patrassi (R. Istituto tecnico di Terni). Il Sig. C. Aiello (R. Liceo V. E. di Napoli) risolve questa questione ricorrendo al teorema di FERMAT, ma più laboriosamente.

Ora essendo evidentemente: $b > h$ e per ipotesi $b > a$, segue che il 2° membro di questa eguaglianza è > 0 e così il primo membro, onde $b + h' > a + h$, c. d. d.

Se il triangolo considerato è rettangolo ed a e b ne sono i cateti: $a = h'$, $b = h$, e $\frac{a h}{a + h}$ e $\frac{b h'}{b + h'}$ sono eguali fra loro perchè uguali ad $\frac{a h}{a + b}$, quando anche a e b siano disuguali, e quest'è l'eccezione che la proposizione ammette.

Il Sig. S. Lopriore (R. Liceo Bari), che sviluppa questa stessa quistione, osserva che $b : a = h : h'$, onde di queste quattro grandezze essendo b la maggiore, e quindi h' la minima, sarà (EUCLIDE, 5°, XXV): $b + h' > a + h$, ecc...

45. Se A' è il punto del lato BC di un triangolo ABC pel quale si ha $BA' : A'C = m$ e P il punto in cui AA' incontra la circonferenza circoscritta al triangolo, dimostrare: 1° che

$$PA + PB + PC = \frac{c(a+c) + mb(a+b)}{\sqrt{(1+m)(mb^2+c^2) - a^2m}};$$

2° che il valore massimo della somma delle tre distanze del punto P ai tre vertici del triangolo si ha quando questa somma uguaglia

$$2 \sqrt{R(R+2r_1)},$$

dove R e r_1 indicano il raggio del cerchio circoscritto al triangolo e quello del cerchio *ex*-inscritto relativo al lato a . (A. LUGLI).

Dimostrazione del Prof. G. Riboni.

1° Dal triangolo ABC , applicando il teorema di Stewart, si ha:

$$c^2 \cdot CA_1 + b^2 \cdot BA_1 = AA_1^2 \cdot a + a \cdot BA_1 \cdot A_1C. \quad (1)$$

Ora da $\frac{BA_1}{A_1C} = m$ segue: $BA_1 = \frac{a m}{1+m}$ e $A_1C = \frac{a}{1+m}$.

Dai triangoli simili AA_1B , PA_1C si ha poi $AA_1 = BA_1 \frac{b}{PB} = \frac{m a b}{PB(1+m)}$

e dai triangoli simili AA_1C , PA_1B : $AA_1 = A_1C \frac{c}{PC} = \frac{a c}{PC(1+m)}$.

Sostituendo nella (1) i valori di BA_1 , A_1C ed il primo dei valori di AA_1 , dopo aver diviso per A_1C , si ottiene:

$$c^2 + m b^2 = \frac{m^2 a^2 b^2}{PB^2 (1+m)} + \frac{m a^2}{1+m},$$

da cui:

$$PB = \frac{m a b}{\sqrt{(1+m)(m b^2 + c^2) - a^2 m}}.$$

Similmente sostituendo nella (1) il 2° valore di AA_1 si ricava:

$$PC = \frac{ac}{\sqrt{(1+m)(m^2b^2+c^2)-a^2m}}.$$

Dal quadrilatero $ABPC$ inscritto, pel teorema di Tolomeo, segue la relazione:

$$a \cdot PA = b \cdot PB + c \cdot PC.$$

Sostituendo in essa i valori trovati di PB e PC si ricava:

$$PA = \frac{c^2 + mb^2}{\sqrt{(1+m)(c^2 + mb^2) - ma^2}}$$

$$\text{e quindi: } PA + PB + PC = \frac{c(a+c) + mb(a+b)}{\sqrt{(1+m)(c^2 + mb^2) - a^2m}} \quad \text{c. d. d.}$$

2° Per la ricerca del massimo trovo conveniente cambiar la variabile. Perciò posto $\text{ang. } BAP = x$ osservo che:

$$PB = 2R \sin x, \quad PC = 2R \sin(A-x), \quad PA = \frac{2R}{a} \left(b \sin x + c \sin(A-x) \right),$$

perciò

$$PA + PB + PC = \frac{2R}{a} \left\{ (a+b) \sin x + (a+c) \sin(A-x) \right\}.$$

La funzione da render massima è: $(a+b) \sin x + (a+c) \sin(A-x) = z$.
Sviluppando ed ordinando rispetto a $\sin x$ si ha:

$$\begin{aligned} & \left((a+b)^2 - 2(a+b)(a+c) \cos A + (a+c)^2 \right) \sin^2 x - \\ & - 2z \left(a+b - (a+c) \cos A \right) \sin x + z^2 - (a+c)^2 \sin^2 A = 0. \end{aligned}$$

e perchè $\sin x$ sia reale è necessario che sia:

$$\begin{aligned} & z^2 \left(a+b - (a+c) \cos A \right)^2 - \\ & \left((a+b)^2 - 2(a+b)(a+c) \cos A + (a+c)^2 \right) \left(z^2 - (a+c)^2 \sin^2 A \right) \geq 0 \end{aligned}$$

od anche, sviluppando e riducendo, che sia:

$$z \leq \sqrt{(a+b)^2 - 2(a+b)(a+c) \cos A + (a+c)^2}.$$

Il massimo cercato adunque è:

$$\frac{2R}{a} \sqrt{(a+b)^2 - 2(a+b)(a+c) \cos A + (a+c)^2}.$$

È facile verificare l'identità di questa espressione colla data $2 \sqrt{R(R+2r_1)}$

quando in questa si ponga $R = \frac{a}{2 \sin A}$ ed $r_1 = p \tan \frac{A}{2} = \frac{p(1 - \cos A)}{\sin A}$.

Il valore di $\sin x$ in questo caso è:

$$\sin x = \frac{a + b - (a + c) \cos A}{\sqrt{(a + b)^2 - 2(a + b)(a + c) \cos A + (a + c)^2}}.$$

Osservazione — Se si prolungano AB ed AC , rispettivamente in E ed F , in modo che $BE = CF = a$ sarà

$$EF = \sqrt{(a + b)^2 - 2(a + b)(a + c) \cos A + (a + c)^2} :$$

la AP (nel caso del massimo) divide l'angolo A per modo che: $\text{ang. } BAP + AFE = CAP + AEF = \text{Retto}$, come si può dedurre dal valore di $\sin x$; infine il massimo equivale al diametro del cerchio circoscritto al triangolo AEF , il che risulta dalla espressione trovata, ed equivale anche al doppio della distanza del centro del cerchio circoscritto al triangolo ABC dal centro del cerchio ex-iscripto tangente al lato a , come risulta dalla espressione data (*).

47*. Verificare le disuguaglianze

$$\frac{m(b-a)}{b^{m+1}} < \frac{1}{a^m} - \frac{1}{b^m} < \frac{m(b-a)}{a^{m+1}}$$

nelle quali è $b > a > 0$, ed m significa un intero positivo. (D. Besso).

Soluzione del Sig. A. Seymandi, allievo della Regia Accademia navale di Livorno. (**).

Basterà verificare che

$$\frac{m(b-a)}{b^{m+1}} < \frac{b^m - a^m}{a^m b^m} < \frac{m(b-a)}{a^{m+1}},$$

ossia che

$$\frac{m}{b^{m+1}} < \frac{b^{m-1} + a b^{m-2} + \dots + a^{m-2} b + a^{m-1}}{a^m b^m} < \frac{m}{a^{m+1}} \dots [1]$$

Ora, essendo $b > a$, si ha evidentemente:

$$m a^{m-1} < b^{m-1} + a b^{m-2} + \dots + a^{m-2} b + a^{m-1} < m b^{m-1}$$

e

$$\frac{m}{a b^m} < \frac{b^{m-1} + a b^{m-2} + \dots + a^{m-2} b + a^{m-1}}{a^m b^m} < \frac{m}{a^{m+1}}$$

ed a più forte ragione la [1] per essere $a b^m < b^{m+1}$ e $a^m b > a^{m+1}$.

(*) Cfr. Baltzer — Planl. §. 14, n. 4.

(**) Soluzioni analoghe da C. Aiello (R. Liceo V. E. di Napoli); A. Baldassarre (R. Istituto tecnico di Bari); G. Bitonti, G. Gallucci e R. Maltese (Istituto tecnico di Catanzaro); A. Coacci (R. Istituto tecnico di Roma); A. Darigo e G. Menicanti (R. Accademia navale di Livorno); O. Manfredi (R. Istituto tecnico di Reggio Emilia); P. Marano (Studente privato in Catania); M. Miconi e P. Patrassi (R. Istituto tecnico di Terni); S. Lopriore (R. Liceo di Bari); G. Piroma (R. Liceo Colombo di Genova); P. Rizzuti (R. Liceo di Catanzaro).

50*. Dimostrare che in un decagono stellato, quale si ottiene prolungando i lati d'un pentagono convesso, il prodotto dei lati di posto dispari è uguale al prodotto dei lati di posto pari. (D. Besso)

Soluzione del Sig. G. Michele Nobile, alunno del R. Istituto tecnico di Chieti.

Sia $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ un pentagono piano convesso: l'intersezione di due lati non consecutivi la chiamo con la lettera B munita dell'indice che ha quella del pentagono non situato su di essi: ottengo così il decagono $B_1 A_3 B_5 A_2 B_4 A_1 B_3 A_5 B_2 A_4 B_1$.

I triangoli $A_1 A_2 B_4$, $A_2 A_3 B_5$ hanno in A_2 angoli eguali o supplementari; quindi il loro rapporto è quello del prodotto dei lati dintorno agli angoli di vertice A_2 , epperò

$$\frac{B_4 A_2}{B_5 A_2} = \frac{A_1 A_2 B_4 \cdot A_2 A_3}{A_2 A_3 B_5 \cdot A_1 A_2}.$$

Analogamente si ha

$$\begin{aligned} \frac{B_5 A_3}{B_1 A_3} &= \frac{A_2 A_3 B_5 \cdot A_3 A_4}{A_3 A_4 B_1 \cdot A_2 A_3}, & \frac{B_1 A_4}{B_2 A_4} &= \frac{A_3 A_4 B_1 \cdot A_4 A_5}{A_4 A_5 B_2 \cdot A_3 A_4}, \\ \frac{B_2 A_5}{B_3 A_5} &= \frac{A_4 A_5 B_2 \cdot A_5 A_1}{A_5 A_1 B_3 \cdot A_4 A_5}, & \frac{B_3 A_1}{B_4 A_1} &= \frac{A_5 A_1 B_3 \cdot A_1 A_2}{A_1 A_2 B_4 \cdot A_5 A_1}. \end{aligned}$$

Moltiplicando membro a membro queste uguaglianze, deducesi

$$\frac{B_4 A_2 \cdot B_5 A_3 \cdot B_1 A_4 \cdot B_2 A_5 \cdot B_3 A_1}{B_5 A_2 \cdot B_1 A_3 \cdot B_2 A_4 \cdot B_3 A_5 \cdot B_4 A_1} = 1, \quad \text{c. d. d. (*).}$$

Soluzione del Sig. U. Grossato, alunno del R. Istituto tecnico di Terni.

Chiamando $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \alpha_3, \beta_3; \alpha_4, \beta_4; \alpha_5, \beta_5$ gli angoli alla base dei 5 triangoli formati da due lati del decagono e da un lato del pentagono convesso a cui essi vanno a terminare; $a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3; a_4, b_4; a_5, b_5$ i lati rispettivamente opposti a questi angoli, che sono in pari tempo i lati del decagono, si avrà:

$$\begin{aligned} a_1 \sin \beta_1 &= b_1 \sin \alpha_1, & a_2 \sin \beta_2 &= b_2 \sin \alpha_2, & a_3 \sin \beta_3 &= b_3 \sin \alpha_3; \\ a_4 \sin \beta_4 &= b_4 \sin \alpha_4, & a_5 \sin \beta_5 &= b_5 \sin \alpha_5 \end{aligned}$$

e poichè β_1 è uguale o supplementare ad α_2 , β_2 uguale o supplementare ad α_3 , ecc., risulta $\sin \beta_1 = \sin \alpha_2$, $\sin \beta_2 = \sin \alpha_3$, ecc., onde moltiplicando membro a membro le precedenti uguaglianze, e sopprimendo i fattori uguali nei due membri, si ottiene

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot b_5. \quad \text{c. d. d. (**).}$$

(*) Soluzioni sostanzialmente analoghe da C. Aiello (R. Liceo V. E. di Napoli), A. Baldassarre (R. Istituto tecnico di Bari), G. D'Asdia (R. Istituto tecnico di Girgenti), L. Giuliadori (Scuola tecnica di Osimo), E. Piccioli (Liceo di Chiavari), P. Patrassi (R. Istituto tecnico di Terni), Riccarda De Albin, D. Manacorda e G. Vincenti (R. Istituto tecnico di Roma), G. A. Venturi (R. Istituto tecnico di Reggio Emilia).

(**) Soluzione analoga dal Sig. P. Patrassi alunno del R. Istituto tecnico di Terni.

I Signori P. Patrassi ed L. Giuliadori osservano giustamente che la proprietà enunciata sussiste per qualunque poligono stellato di $2n$ lati, ottenuto prolungando i lati di un poligono convesso di n lati, purchè non sia $n < 5$.

Si dichiara inoltre ricevimento delle soluzioni seguenti: quistioni **a)** dal Sig. *F. Benucci, F. Palatini*; **c)** *S. Gatti, F. Palatini, F. Viaggi*; **42*** *C. Aiello*; **43*** *C. Aiello, S. Lopriore*; **44*** *C. Aiello*; **46.** *F. Viaggi, U. Scarpis*; **48.** *S. Cutania, L. Merante, F. Viaggi*; **49.** *L. Merante, F. Viaggi*; **51 e 52** *G. Russo, U. Scarpis, F. Viaggi*; **53*** *G. Michele Nobile*; **54*** *C. Aiello, A. Baldassarre, A. Coacci, S. Lopriore, O. Manfredi, P. Marano, G. Marsilia, P. Patrassi, G. Pinna*; **55*** *C. Aiello, A. Baldassarre, G. Bitonti, A. Coacci, Riccarda De Albini, G. Gallucci, S. Lopriore, R. Maltese, P. Marano, Z. Mengoni, G. Pinna, M. Righetto, G. A. Venturi, G. Vincenti* — soluzioni alle quali si darà evasione col fascicolo venturo.

La Direzione.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

56*. Dimostrare che, indicando con A, B, C, D quattro vertici consecutivi d'un poligono regolare, si ha

$$AC^2 = AB \times (AB + AD).$$

57*. Dimostrare che, se un triedro ha un diedro retto, la somma dei coseni dei tre angoli piani non può essere eguale a -1 .

58*. Un tronco di piramide, in cui il perimetro della base maggiore è doppio di quello della base minore, è diviso in due parti equivalenti con un piano parallelo alle basi: calcolare a meno di $\frac{1}{10000}$ il rapporto delle distanze del piano segante dalle due basi.

59. Dimostrare che il rapporto del raggio del circolo inscritto ad un ettagono regolare al raggio del circolo circoscritto soddisfa alla equazione

$$8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0.$$

60. Dimostrare che la somma dei quadrati delle distanze d'un punto qualunque d'una superficie sferica dai quattro vertici d'un

(*) Il tempo utile per l'invio delle soluzioni delle quistioni nuove e di quelle rimaste insolute, scade un mese e mezzo dopo la chiusura della redazione del fascicolo. La data di chiusura si troverà nell'ultima pagina di ciascun numero del Periodico.

Le quistioni contrassegnate con asterisco sono esclusivamente indirizzate agli alunni delle nostre scuole.

tetraedro a facce eguali, in essa inscritto, è eguale ad otto volte il quadrato del raggio.

D. BESSO.

61. Fra quali limiti deve variare l'angolo acuto α , acciocchè l'angolo β , legato ad α dalla seguente relazione

$$\frac{\sqrt{2} + 1 + (\sqrt{2} + 1) \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{2} - 1 + (\sqrt{2} - 1) \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta},$$

sia pur esso acuto?

62*. Essendo a e b numeri interi primi con 30, dimostrare che l'espressione

$$a^8 + a^6 b^2 - a^2 b^6 - b^8$$

rappresenta un numero multiplo di 720.

S. GATTI.

63*. Costruire un triangolo dato un lato, l'altezza relativa a questo lato e la bisettrice dell'angolo opposto.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Das geschichtliche Element im mathematischen Unterrichte der höheren Lehranstalten. Vortrag gehalten bei der 62. Versammlung Naturforscher und Aerzte zu Heidelberg von P. TREUTLEIN, Professor am Gymnasium zu Karlsruhe Braunschweig, 1890, p. 32.

In occasione del XLII Congresso dei Naturalisti e Medici tedeschi, tenutosi ad Heidelberg nel Settembre ultimo scorso, il signor P. Treutlein, conosciuto per i suoi lavori intorno alla Matematica delle età passate, ha pronunciato un importante discorso avente per iscopo di far ottenere un posto nell'insegnamento delle Scienze esatte a considerazioni di indole storica, discorso sul quale credo opportuno attrarre l'attenzione dei lettori di questo *Periodico*.

Pretendere che la storia sia un ingrediente dell'insegnamento scientifico più elementare sarebbe esagerazione e dal pericolo di cadere in essa il signor Treutlein è difeso dalla sua lunga esperienza didattica. Invece, il desiderio che nell'insegnamento superiore si trovi un elemento storico, si può ritenere, almeno in parte, già soddisfatto, giacchè — prescindendo anche dai corsi speciali sulla

storia della Matematica che furono istituiti presso alcune Università — è lecito asserire non esservi alcuno fra gli insegnanti di Istituti superiori che non inserisca nel corso delle sue lezioni, con maggiore o minore larghezza a seconda delle sue tendenze particolari, delle notizie storico-bibliografiche relative all'argomento che svolge. Ma questo stesso desiderio è ragionevole nell'insegnamento medio e d'altronde è finora insoddisfatto.

Che esso sia ragionevole è dimostrato da questa sola considerazione. Negli Istituti di istruzione media i vari rami d'insegnamento hanno il fine comune di sviluppare l'intelligenza dello scolaro e di assicurargli quella coltura generale che gli sarà necessaria qualunque sia la via nella quale si mette: per ciò si cerca sempre di stabilire il più gran numero di intimi rapporti fra di essi. Assai spesso però accade di udire affermare che la Matematica sta da sè e deve rimanere isolata, che l'indole sua si oppone a che fra essa e le altre discipline venga stretto qualsiasi legame, ecc. Orbene a nostro avviso queste affermazioni sono troppo assolute e se nell'insegnamento della Matematica esistesse un elemento storico, il legame in discorso sarebbe ben presto stabilito. Se, ad esempio, il matematico della scuola esponesse i metodi usati dai vari popoli per leggere e scrivere i numeri, egli avrebbe occasione di completare l'insegnamento delle lingue classiche facendo conoscere i sistemi di numerazione dei Latini e dei Greci, o di rendere ragione delle denominazioni strane *soixante-dix, quatre-vingt*, ecc. incontrate da' suoi alunni nel corso di lingua Francese. Se egli parlasse un po' delle origini della Geometria, non solo impedirebbe a' suoi discepoli di condividere l'opinione (così errata e pur tanto diffusa!) che la Geometria sia uscita dal capo di Euclide come Minerva dalla testa di Giove, ma potrebbe far loro conoscere quanta parte ebbero nella sua fondazione e nel suo sviluppo quel Platone e quell'Aristotele che essi ebbero occasione di ammirare nello studio della Filosofia. Ed egli potrebbe ancora citare il nome del grande filosofo di Stagira per dimostrare come l'uso delle lettere nell'Aritmetica generale abbia probabilmente la sua prima radice nel costume che questi aveva d'indicare mediante le lettere dell'alfabeto i concetti astratti.

I punti di contatto che verrebbero così a stabilirsi fra l'insegnamento delle Matematiche e gli altri insegnamenti sono innumerevoli e un po' d'attenzione è sufficiente a rivelarli; l'accertamento della loro esistenza farebbe acquistare alla istruzione media ovunque l'aspetto di un solido cristallino invece dell'apparenza di un conglomerato da essa ora in gran parte posseduto. Non è qui il luogo nè il momento opportuno per entrare in particolari sul modo con cui questo intento si potrebbe raggiungere; il signor Treutlein lo ha dimostrato su parecchi esempi assai bene scelti, suggeritigli dalla lunga sua pratica; il lettore li troverà nel lavoro originale accompagnati da altre argomentazioni connesse alla questione.

Un'obiezione alla tesi sostenuta dal Prof. Treutlein che si presenta spontanea è l'esiguità del tempo che generalmente è concesso allo svolgimento dei programmi ufficiali. L'obiezione è grave ed io lascio giudicare se essa sia tale da fare abbandonare totalmente l'idea dell'egregio Professore tedesco a chi abbia la competenza che deriva dall'esperienza personale e che a me fa totalmente

difetto (*). Mi pare però meritare speciale considerazione l'osservazione da lui fatta che le notizie storiche, intercalate in una lezione scientifica, concedono alla mente di chi studia argomenti difficili, quelle interruzioni, quelle pause che egli può ragionevolmente pretendere.

Noi personalmente saremmo assai lieti che in Italia fossero accolte con favore le vedute del Signor Treutlein, non solo pel vantaggio che secondo noi ne ridonderebbe agli scolari, ma anche perchè in tal modo la mente dei professori sarebbe ricondotta verso un campo di studi che da noi è completamente trascurato: parliamo degli studi storici. Lungi da noi l'antico concetto che pone a uno stesso livello il far grandi cose e il raccontarle, quindi preferiremmo assai che gli insegnanti delle nostre scuole medie si occupassero di far progredire la scienza piuttostochè esporre conquiste già fatte. Ma ai più fra essi manca il tempo indispensabile per compiere colla dovuta continuità delle investigazioni originali e quindi essi restringono la propria azione alle esigenze della scuola. A tutti invece sarebbe possibile di compiere ricerche di erudizione le quali non esigono un lavoro ininterrotto: essi allora potrebbero aspirare a fornire gli elementi per una sintesi storica, la quale sorgerebbe quando esse fossero abbastanza numerose e importanti e delle quali essi sarebbero fattori essenziali. A dimostrare la legittimità di questa nostra aspirazione basta osservare come in Germania molti insegnanti di scuole medie (per esempio il Treutlein stesso, il Nizze, l'Unger, ecc.) hanno aiutato con preziosi dati di fatto lo studio dello svolgersi del pensiero matematico; e quando si pensa al numero di documenti importanti per la storia scientifica che stanno dimenticati nelle innumerevoli biblioteche italiane (**) — documenti che gli stranieri ci invidiano e che noi dovremmo ricordare col rossore di chi non sa trar profitto dalle ricchezze che possiede — non si può non lamentare che fra noi sia così poco diffusa l'abitudine di studiare le antiche opere matematiche, alle quali si preferisce concedere un'onorata sepoltura ed un eterno oblio.

GINO LORIA.

Zur Auflösung der dreigliedrigen irrationalen Gleichungen mit linearen Radikanden von Dr. JOS. DIKLMANN in Viersen.

Per dare idea del principale scopo della nota che porta il titolo riportato, inserita nella XIX annata della *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen* di HOFFMANN, prendiamo a considerare l'equazione a tre termini con radicandi lineari

$$\sqrt[3]{9x+1} - \sqrt[3]{4x-3} = 3. \quad [1]$$

(*) Affinchè tutti potessero avere sott'occhio gli elementi necessari per pronunciare il giudizio, vedrei con piacere tralotto e stampato in questo *Periodico* il lavoro del Sig. Treutlein, accompagnato da note atte a sopperire alle cognizioni storiche presupposte nel lettore.

(**) Che questa non sia una congettura priva di fondamento è dimostrato dall'esistenza di *Un precursore italiano di Lobatschewsky e Bolyai* ignoto fino al giorno (17 marzo 1889) in cui il Professore Beltrami lo presentò ai suoi colleghi dell'Accademia dei Lincei.

Risolvendola col metodo ordinario, dopo due elevamenti al quadrato, si è condotti all'equazione

$$25 x^2 - 194 x + 133 = 0,$$

le cui radici sono 7 e $\frac{19}{25}$. Sostituendo successivamente questi valori nei due radicandi, si trova prima $\sqrt{9x+1} = \pm 8$ e $\sqrt{4x-3} = \pm 5$, quindi $\sqrt{9x+1} = \pm \frac{14}{5}$ e $\sqrt{4x-3} = \pm \frac{1}{5}$. Ora delle quattro possibili combinazioni dei segni delle radici, che si presentano in ciascun caso, una sola soddisfa alla proposta equazione, e precisamente $+$ e $+$ nel 1° caso e $+$ e $-$ nel 2°, e per giunta la combinazione da adottare nell'uno è diversa di quella da scegliere per l'altro.

In vista di ciò l'A., dopo avere osservato che il metodo comunemente adoperato per la risoluzione delle equazioni a tre termini con radicandi lineari, non è del tutto soddisfacente, mancando di quel carattere di determinatezza che dev'essere precipuo scopo delle matematiche, potendo anche ingenerare confusione negli scolari, assume per ogni equazione come [1] la forma più generale

$$F(x) + F_1(x) = c$$

e si pone il problema di determinare $F(x)$ ed $F_1(x)$, in funzione dei coefficienti della data equazione, in modo da trovare $F(x) = \alpha$ ed $F_1(x) = \beta$ con $\alpha + \beta = c$, il che naturalmente viene a togliere qualsiasi ambiguità e permette di trovare le radici della [1] resolvendo una delle equazioni $F(x) = \alpha$, $F(x) = \beta$.

Il metodo da lui seguito mentre risponde completamente alla posta quistione, ha poi il merito di raggiungere lo scopo applicando un processo di pura eliminazione lineare, il che è certamente vantaggioso sotto l'aspetto didattico. Questo è il motivo che ci ha sospinti a darne un esteso cenno.

L'A. considera separatamente le equazioni

$$\sqrt{ax+b} + \sqrt{a_1x+b_1} = c, \quad \sqrt{ax+b} + \sqrt{a_1x+b_1} = c \sqrt{a_2x+b_2}$$

applicando all'una ed all'altra lo stesso processo, ond'è che noi ci limiteremo qui a riassumere il suo trattamento per quanto riguarda l'ultima più generale.

Pongasi

$$ax + b = y^2, \quad a_1x + b_1 = z^2, \quad a_2x + b_2 = u^2, \quad y + z = cu.$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{aligned} 0 \cdot x + y + z - c \cdot u &= 0 \\ -ax + y \cdot y + 0 \cdot z + 0 \cdot u &= b \\ -a_1x + 0 \cdot y + z \cdot z + 0 \cdot u &= b_1 \\ -a_2x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + u \cdot u &= b_2 \end{aligned} \quad [2]$$

che considerato come lineare fornisce

$$y = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -c \\ -a & b & 0 & 0 \\ -a_1 & b_1 & z & 0 \\ -a_2 & b_2 & 0 & u \end{vmatrix} : R, \quad R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -c \\ -a & y & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & z & 0 \\ -a_2 & 0 & 0 & u \end{vmatrix},$$

ossia

$$Ry = u(a_1 b - a b_1) - c z(a_2 b - a b_2) = u \Delta - c z \Delta_1,$$

avendo posto $\Delta = a_1 b - a b_1$, $\Delta_1 = a_2 b - a b_2$. Se si fa inoltre $\Delta_2 = a_2 b_1 - a_1 b_2$ e si ricavano dal sistema [2], in modo analogo, la z ed u , si perviene all'altro sistema

$$Ry + c \Delta_1 z - \Delta u = 0, \quad c \Delta_2 y + R z + \Delta u = 0, \quad \Delta_2 y + \Delta_1 z + R u = 0 \dots [3]$$

Per la coesistenza di queste tre equazioni dev'essere

$$\begin{vmatrix} R & c \Delta_1 & -\Delta \\ c \Delta_2 & R & \Delta \\ \Delta_2 & \Delta_1 & R \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando ed escludendo $R = 0$, risulta

$$R = \pm \sqrt{c^2 \Delta_1 \Delta_2 + \Delta (\Delta_1 - \Delta_2)},$$

onde R , che conteneva in origine y, z, u , si trova espressa mediante i coefficienti.

Dopo ciò dal sistema [3] si deduce facilmente

$$\frac{y}{u} = \frac{R + c \Delta_1}{\Delta_1 - \Delta_2}; \quad \frac{z}{u} = -\frac{R + c \Delta_2}{\Delta_1 - \Delta_2}.$$

Dai valori che si ottengono per $\frac{y}{u}$ e $\frac{z}{u}$, due per ciascun quoziente la R avendo doppio segno, la cui somma è c , sono poi da ricavare i valori di x che soddisfano all'equazione proposta.

L'A. discute le formole ottenute, applica il suo metodo ad alcune equazioni numeriche e conclude come segue:

1) Nelle equazioni irrazionali le espressioni delle radici sono da prendersi assolutamente e da considerare da principio come incognite i cui valori si lasciano calcolare direttamente dai coefficienti dell'equazione.

2) I valori di x si deducono da quelli dei radicali.

A. LUGLI.

Pubblicazioni ricevute dalla Direzione del Periodico

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del professore G. BATTAGLINI. Vol. XXVIII. Gennaio-Febbraio. Napoli, B. Pellerano editore, 1889.

Journal de Mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié

- sous la direction de MM. DE LONGCHAMPS, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, LUCIEN LÉVY, agrégé des sciences mathématiques, directeur des études à l'Ecole préparatoire de Saint-Barbe. 3^e Série, Quatorzième année. N. 1, 2. Février, Mars, 1890. Paris, librairie Ch. Delagrave.
- Journal de Mathématiques élémentaires* publié par H. VUIBERT. 14^e année. N. 9, 10, 11, 12. Paris, M. Nony et C., 17 rue des Écoles, 1890.
- L'Università*. Rivista dell'Istruzione superiore, pubblicata da una società di professori. Anno IV, 1890. Gennaio-Febbraio. Bologna, Libreria Idelson.
- Mathesis*, recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. MANSION, professeur à l'Université de Gand, et J. NEUBERG, professeur à l'Université de Liège. Tome dixième. Janvier, Février, Mars, 1890. Paris, Gauthiers-Villars & fils; Gand, Ad. Hoste, Éditeur.
- Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*. Tomo IV. Fasc. I e II, Gennaio-Febbraio e Marzo-Aprile, 1890.
- Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche* (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2^a, Vol. IV, Fasc. 1^o e 2^o, Gennaio e Febbraio, 1890.
- Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*. Ein Organ für Methodik, Bildungsgehalt und Organisation der exakten Unterrichtsfächer an Gymnasien, Realschulen, Lehrerseminarien und gehobenen Bürgerschulen, herausgegeben von J. C. V. HOFFMANN. XXI Jahrgang. 1 Heft. Leipzig, B. G. Teubner, 1890.
- AGAMENNONE (G.) — Sopra la correlazione dei terremoti con le perturbazioni magnetiche. (Rend. R. Acc. Lincei, 1890).
- BARDELLI (G.) — Commemorazione del Comm. Prof. Celeste Clericetti (Rend. R. Istituto Lombardo, 1890).
- BIGIARI (C.) — Sulle equazioni differenziali lineari. (Rend. R. Acc. Lincei, 1890).
- CANCANI (A.) — Sul valore normale delle temperature medie, mensili ed annue di Roma. (Rend. R. Acc. Lincei, 1890).
- GIUDICE (F.) — A proposito della quistione 88 proposta dal Prof. Cesàro (Gior. di Battaglini, Vol. XXVII, 1889). — Una considerazione relativa alle serie a termini positivi costanti tra le quali trovasi quella d'Eulero (idem, idem).
- NAGY (A.) — Fondamenti del calcolo logico. (Gior. di Battaglini Vol. XXVIII, 1890).
- PERSIANI (O.) — Elementi di geometria secondo Euclide ad uso dei licei. Libro IV. Roma, Tipografia della Pace, 1890. — Prezzo: cent. 75.
- PORTA (F.) — Geometria analitica. Torino, Fratelli Bocca editori, 1890. Prezzo: Lire 8.
- RICCARDI (P.) — Di alcune opere di prospettiva di autori Italiani ommesse nella « Histoire de la Perspective » di M. Poudra. (Bibliotheca mathematica di G. Eneström, 1890).

SULL' INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

NELLE SCUOLE CLASSICHE

(Continuazione e fine).

Veniamo ora al Liceo. Qui l'insegnamento della matematica era una volta distribuito in dodici ore settimanali delle quali sei nella prima classe e le altre sei o divise tra le altre due classi o, sebbene per poco tempo, riunite tutte nella seconda; e in tal periodo fu anche aggiunta un'ora e mezza settimanale alla terza classe, allo scopo che i giovani, avendo oramai esaurito lo studio della matematica elementare, potessero esercitarsi nella soluzione dei problemi e tener presente la materia studiata nel momento di presentarsi alla licenza liceale. Con sei ore settimanali di lezione gli alunni della prima classe potevano sufficientemente assimilarsi gli argomenti del programma, addestrarsi nel calcolo algebrico e nella soluzione di facili problemi di Geometria, che si spiegava fino a tutto il terzo libro di Euclide. In tal modo nella seconda e terza classe si poteva procedere assai più spedatamente nello svolgere le altre parti del programma, e rimaneva tempo sufficiente per fare esercizi su tutte le parti della materia spiegata.

Ora invece nel Liceo per la matematica non sono assegnate che tre ore alla settimana in ciascuna delle tre classi; e per la prima specialmente questo tempo è affatto insufficiente. In questa classe il programma di Algebra è rimasto su per giù il medesimo di prima, ma a quello di Geometria venne aggiunto il quarto libro. Nè serve il dire che la spiegazione della Geometria deve ora cominciare nella prima classe liceale dal secondo libro perchè il primo deve essere studiato nel Ginnasio. Bisogna pensare: che nella prima liceale convengono alunni provenienti da scuole differenti e che quindi hanno studiato la Geometria con metodi e testi diversi, che molti di questi giovani, specialmente se hanno studiato privatamente, della Geometria ne avranno letto appena quel tanto da poter rispondere all'esami-

natore nei pochi minuti dell'esame orale. In tali condizioni se il professore vuol procedere con sicurezza non ha niente di meglio a fare che riprendere dal principio l'insegnamento della Geometria. Dovendo fare tutto questo è assolutamente impossibile svolgere e bene tutto il programma; e si rinnoveranno gli stessi inconvenienti che ho notati pel Ginnasio riguardo ai temi scritti ed alla loro correzione. E con alunni così poco esercitati come si potrà procedere innanzi nelle due classi superiori? Se una volta per queste le sei ore complessive erano sufficienti, adesso non lo sono più, perchè ad ogni momento bisogna arrestarsi a ricordare le cose precedenti, ogni semplice calcolo, ogni semplice trasformazione, presenta difficoltà insormontabile agli alunni se non sono aiutati dal maestro; e nella seconda classe specialmente la spiegazione del quinto libro di Euclide occuperà un gran tempo, perchè tutti gli insegnanti di matematica fanno quanti sforzi bisogna fare perchè sia inteso, se non da tutti, almeno da un discreto numero di scolari.

Notisi poi che il programma è sempre presso a poco il medesimo ora che tra Ginnasio e Liceo il tempo assegnato all'aritmetica e matematica è di 17 ore per settimana (supposto che nel Ginnasio inferiore il tempo assegnato per l'aritmetica e le nozioni di scienze naturali sia diviso per metà fra i due rami di insegnamento) di quello che era con ventiquattro e fino venticinque ore e mezzo; poichè sono riduzioni insignificanti l'aver tolto i teoremi relativi al volume del tronco di piramide a basi parallele e la risoluzione dei triangoli obliquangoli, potendosi nella terza classe, se gli alunni fossero ben preparati, svolgere questi argomenti in tempo assai breve.

Anche nel Liceo poco si può ottenere dai giovani per ciò che riguarda la diligente e coscienziosa esecuzione degli esercizi scritti fin che non sia ripristinato l'esame scritto. L'aver ora lasciata la facoltà ai candidati di scegliere tra l'esame scritto di greco e quello sulla materia scientifica equivale all'aver quasi abolita quest'ultima perchè in generale i giovani preferiscono la prova scritta di greco che offre *meno pericoli e maggiori speranze* di quella di matematica. E siccome più che ogni altra cosa, chi si presenta all'esame, cerca il modo di rendere più facile la riuscita, non è raro il caso,

per non dirlo affatto costante, di alunni che intendono di darsi agli studi matematici superiori, e che ottenuta la licenza si iscriveranno nella facoltà matematica, i quali non si sentono abbastanza sicuri nella matematica elementare da sottomettersi con speranza di successo alla prova scritta di matematica che, per quanto si sia detto il contrario, è quasi sempre stata assai facile, e preferiscono la prova di greco. E a questo proposito sarebbe utile che fosse constatato ufficialmente il numero degli studenti iscritti nelle facoltà di matematica provenienti dai Licei e che non si sono sentiti in grado di risolvere il problema di matematica nell'esame di licenza. Credo che il risultato sarebbe tale da preoccupare seriamente tutti quelli a cui sta a cuore che il nostro paese mantenga nel progresso degli studi matematici il posto onorevole che fin'ora ha occupato, e convincerebbe tutti della necessità di obbligare alla prova scritta di matematica almeno quei giovani che intendono iscriversi in una facoltà di matematica.

Nè questo è il solo danno che tale disposizione reca agli studi liceali; i giovani, vedendo che possono fare a meno della prova di greco o di quella di matematica, e non essendo evidente come la eccellenza nel greco possa compensare il difetto nella matematica o viceversa, ne traggono spontanea la conclusione, che ad ambedue le materie si dà poca importanza, e che nell'insegnamento liceale hanno un posto affatto secondario.

Nè meno dannose, almeno per quanto riguarda la matematica, sono le conseguenze dell'altra disposizione dell'attuale regolamento che concede in certe circostanze ai giovani di presentarsi all'esame di licenza liceale solo dopo due anni dalla licenza ginnasiale. Per decidersi se gli convenga approfittare di questa concessione il giovane non pensa affatto se le sue forze intellettuali, la sua istruzione, sieno tali che possa senza danno della sua coltura abbreviare di un anno il corso liceale. Tutti non vedono in ciò che una via per poter tentare la sorte di *risparmiare un anno* ed è frequente il caso di giovani che rimandati nello esame di promozione dalla prima alla seconda classe, e che quindi dovrebbero ripetere il primo corso, si ritirano dalle scuole pubbliche ed osano presentarsi nell'estate successivo all'esame di licenza liceale. Una volta che questi giovani hanno tentata la prova della licenza, anche se

rimandati, e lo sono in gran parte, è inutile sperare che essi ripiglino regolarmente gli studi liceali. Di solito ecco che succede: questi candidati, se non hanno trovato la Commissione esaminatrice tanto indulgente da concedere loro la licenza liceale, non l'avranno trovata sempre tanto severa da negar loro la idoneità alla terza classe liceale. Con questa ottengono l'iscrizione in una scuola di Farmacia o di Veterinaria e cominciano così a frequentare le scuole universitarie, allora disdegnano di occuparsi degli studi liceali, ed all'esame di licenza non pensano più che all'avvicinarsi della nuova sessione e sarà molto se poco prima daranno una ripassatina alle materie sulle quali dovranno essere esaminati, sperando che non si avrà il *coraggio* o la *poca umanità* di rimandarli una terza o quarta volta. Del resto che debbono fare gli esaminatori? Il candidato nella prima sessione di esami avrà superato le prove di qualche materia, nella successiva quelle di qualche altra, qualche volta avrà goduto di una concessione ministeriale, e dopo essersi presentato parecchie volte non avrà più che a superare l'esame in una o due materie e in tal caso la pietà vince anche i professori più severi. Ottenuta la licenza dopo essere stato un anno iscritto nella scuola di Farmacia o di Veterinaria, si ottiene di passare al secondo anno delle facoltà di medicina, di matematica o magari di legge, e si raggiunge lo scopo principale di *guadagnare un anno*. Con questo metodo è facile capire quanto avrà *guadagnato* la coltura generale di questi giovani e quanto il buon andamento dei loro studi universitari. Per ciò che riguarda la prima è fuor di dubbio che al momento in cui ritirano il diploma di licenza degli studi liceali non ricorderanno quasi più nulla, e per i secondi si troveranno con un gran numero di esami arretrati da sostenere e saranno fra quelli che al momento dell'esame di laurea hanno sulle spalle gli esami speciali a dozzine. S'intende che tutto questo possa accadere, e pur troppo molto di frequente, anche all'alunno che abbia compiuto regolarmente il corso liceale, ma sarà la condizione quasi normale per colui che dopo aver fatto il primo anno e due o tre mesi del secondo in una scuola pubblica, l'abbandona per consacrare il tempo che rimane a compire l'anno scolastico, a prepararsi, aiutato da un insegnante privato più o meno esperto, qualche volta da uno studente che ha

finito il Liceo appena l'anno precedente, all'esame di licenza, condensando così in pochi mesi di studio tutto il programma del secondo e terzo anno di Liceo. Se il giovane è animato da buona volontà si sottopone ad un lavoro improbo che stanca la mente senza frutto, e se egli è un negligente che tenta la prova per sottrarsi più presto alla disciplina del Liceo, allora senza questa, senza il legame dell'orario, senza l'obbligo di prepararsi a determinate lezioni e di far esercizi in giorni determinati, interromperà ad ogni momento le sue occupazioni appena abbia un leggero sintomo di noia o di stanchezza.

È evidente che da questa condizione di cose più di tutto ne debba risentire danno il profitto nello studio della matematica, ove più che in ogni altra dottrina si sente il bisogno di uno studio regolare ed ordinato, e che il discente disponga di un tempo sufficiente per assimilarsi le nuove cose che impara e per eseguire numerosi esercizi ai quali possa pensare con calma. Inoltre i giovani che anticipano l'esame di licenza liceale sono i più maturi di età e perciò, se intelligenti e volenterosi, quelli che dello studio delle matematiche potrebbero cavare maggior profitto; se tardi d'ingegno e negligenti sono altresì quelli che più sentiranno la necessità di non affrettare i loro studi.

Da quanto ho detto mi sembra che risulti sempre evidente la sproporzione fra le cose che il professore di matematica deve insegnare e il tempo disponibile a questo scopo. Ora sembrami anche troppo vasto il programma di matematica per alunni che non intendono progredire in tali studi, e per i quali la matematica non deve servire che come ginnastica mentale e per scopo di coltura generale; e credo che, senza che nè l'una nè l'altra possano soffrirne, sia possibile diminuirlo alquanto, a condizione però che non si diminuiscano di più le ore d'insegnamento, e che piuttosto vengano aumentate.

In quanto a coloro che intendono percorrere gli studi matematici, bisogna pensare che neppure col programma attuale imparano tutto ciò che per loro è necessario a sapersi, ma, quel che è peggio su quanto loro si insegna, per la ristrettezza del tempo, non possono avere una preparazione sufficiente da poter loro servire di solida base per gli studi futuri. Diminuendo il programma ma aumentando le ore d'insegnamento, imparerebbero nel Liceo minor quantità di cose, ma su quelle

che saranno insegnate sarebbero così sicuri da poter da loro stessi o dietro brevi accenni dei professori universitari riparare alla mancanza del programma liceale. Giacchè mi sembra che un giovane ben preparato e ben sicuro dei primissimi elementi e dei principî più generali della matematica, che con continui esercizi abbia raggiunto una certa facilità a concepire e trattare nel modo più semplice le quistioni, debba poi facilmente imparare tutte le teorie speciali di cui può in seguito avere man mano bisogno.

Soprattutto è indispensabile ristabilire le prove scritte tanto negli esami di promozione come in quelli di licenza, e quando vi fosse modo di esercitare bene gli alunni lungo l'anno scolastico non si ripeterebbero più in tali prove gli esempi, che tutti ricordano, di generali disastri e che forse furono la causa della loro abolizione. È certo che se la prima volta che un alunno tenta la soluzione di un problema, anche semplice, è abbandonato alle proprie forze e lo deve fare in una prova di esame, novantanove volte su cento fallirà. Ma quando il maestro avesse avuto tempo di assegnare almeno una volta al mese un esercizio scritto in iscuola il risultato sarebbe differente. Infatti è certo che nella scuola gli scolari penserebbero a fare da soli, prima perchè il tempo ristretto non lascerebbe agio a cercare l'aiuto altrui, e poi la frequenza delle prove, e non avere esse conseguenze decisive come quelle dell'esame, li distoglierebbe dall'organizzare la frode, che una volta o l'altra potrebbe con loro danno essere scoperta. Inoltre dalla lettura di questi scritti, potrebbe il maestro farsi un'idea delle autenticità del lavoro, anche in base alla sola presunzione di quanto è capace di fare un giovane, e quindi prendere qualche provvedimento per l'avvenire; mentre questa presunzione resterebbe senza nessun effetto se si trattasse di una prova di esame.

Col tempo ristretto di cui ora si dispone bisogna limitarsi a dare pochi problemi da risolvere a casa; ma allora è inutile sperare che gli alunni facciano da loro. La maggior parte si affiderà all'aiuto altrui, giacchè ci vorrebbe un grande amore per lo studio in generale ed in particolare per la matematica per dedicare un poco di tempo alla soluzione di un problema quando poche parole suggerite da altri possono esimere da ogni fatica. Nell'ipotesi migliore il giovane che si serve

dell'aiuto altrui per risolvere un problema, se lo farà anche spiegare e poi cercherà di studiarne e di impararne la soluzione come farebbe di una proposizione del suo testo. È qualche cosa anche questo, ma con ciò non si raggiunge ancora lo scopo al quale si mira col proporre agli scolari la soluzione dei problemi, che non è solo di far conoscere nuove proprietà speciali, non assolutamente necessarie per l'intelligenza degli argomenti successivi del programma, ma anche e principalmente di abituare la mente dei giovani allo sforzo di trovare da sè le relazioni che legano gli elementi del problema, e facilitargli così lo studio di nuove teorie ed il ricordarle. Per ottenere dai giovani questo sforzo mentale e costringerli ad acuire il loro intelletto alla ricerca della verità, credo che l'unico esercizio vero ed efficace sia quello che si fa nella scuola in presenza del maestro a voce ed in iscritto. Sul principio il giovane farà qualche tentativo infruttuoso, ma se non ha speranza di aiuto raddoppierà gli sforzi che in fine, specialmente se il maestro avrà cura di graduare gli esercizi anche fra gli alunni della stessa classe, saranno coronati da felice riuscita. Allora non v'ha dubbio che il giovane comincerà a provare quel sentimento di compiacenza che in tutti si manifesta quando si riesce in una impresa, che si giudicava quasi impossibile. Da questo intimo sentimento al desiderio di fare di più, all'amore per quelli studi verso i quali prima si nutriva invincibile ripugnanza il passo è breve e non dubito che giovani così educati daranno di sè buona prova e gli studi matematici ne risentiranno notevole vantaggio.

Anche la facoltà di anticipare l'esame di licenza liceale dovrebbe essere meglio disciplinata. Prima di tutto, di essa non dovrebbero approfittare che quelli che realmente sono soggetti a leva; e poi si dovrebbe permettere il passaggio dal primo anno dalle scuole di Farmacia e Veterinaria al secondo corso delle altre facoltà universitarie solo quando il giovane avesse già da un anno ottenuta la licenza liceale.

DEMETRIO VALERI.

INTORNO AL SIGNIFICATO DI ALCUNE QUESTIONI DI PROBABILITÀ

Il Prof. V. Murer nel fascicolo VI dell'anno IV di questo Periodico esamina la probabilità affinché un triangolo preso ad arbitrio sia isoscele anzichè rettangolo, e il Prof. S. Rindi torna incidentalmente sulla questione in una nota che fa parte del fascicolo II dell'anno V. Leggendo quei due pregiati articoli mi è venuto un qualche dubbio circa il significato preciso da attribuire alla suddetta questione, nonchè ad altre consimili delle quali abbonda la letteratura della probabilità.

Intendo benissimo come si possa domandare se un triangolo disegnato a caso sarà acutangolo anzichè ottusangolo (non sarebbe il caso di includere nella questione i triangoli rettangoli, la probabilità dei quali è nulla rispetto a quella dei triangoli delle altre due specie). Quella che non arrivo a capire è la probabilità che un triangolo, preso o disegnato a capriccio, sia isoscele anzichè rettangolo. Perchè, mentre vedo la qualità di triangolo scindersi nelle due di acutangolo e di ottusangolo, non so trovare un fatto unico che comprenda sinteticamente tanto il fatto del triangolo isoscele quanto l'altro del triangolo rettangolo. Per questa ragione i due fatti non mi sembrano paragonabili fra loro. Ammetto che un discepolo ideale, indifferente cioè a tutti i casi, quale lo richiederebbe il calcolo delle probabilità, invitato dal maestro a disegnare un triangolo, lo farebbe più verosimilmente ottusangolo che non acutangolo. Ma se gli si dicesse di fare a sua scelta un triangolo isoscele o un triangolo rettangolo, non ci sarebbe, mi pare, ragione alcuna per aspettarsi di preferenza l'un triangolo o l'altro. Gli è che le qualità di isoscele e di rettangolo non si possono occultare sotto un unico concetto, come, dicendo triangolo, si occultano quelle di acutangolo e di ottusangolo. Nè si dica che disegnando un triangolo a piacimento il caso speciale del triangolo rettangolo potrà avverarsi più o meno facilmente che non quello del triangolo isoscele, *dato che uno dei due*

casi si avveri, perchè nella questione del disegnare un triangolo qualunque, i suddetti casi speciali intervengono entrambi con probabilità nulla, e fra due zeri della questione non si può istituire confronto di sorta. Per ciò non mi sembra corretto il derivare la probabilità del triangolo rettangolo di contro al triangolo isoscele dalla figura che serve a mettere in chiaro quella del triangolo acutangolo di contro all'ottusangolo, come fa il Murer nell'articolo sopra citato. L'arbitrarietà del risultato al quale può condurre il metodo seguito dal Murer, arbitrarietà notata nell'articolo del Rindi, parmi debba far capo alle precedenti mie osservazioni. Lo stesso rapporto $2 : 1$ che il Prof. Giudice assegna senza dimostrazione alla probabilità del triangolo isoscele di contro al triangolo rettangolo nei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (anno 1890, fascicolo III) può essere sospettato di arbitrario, al pari dell'altro $\sqrt{3} : 1$ trovato precedentemente dal Murer, risultando esso, al dire del Ch^{mo} Professore, dal confronto di due probabilità infinitamente piccole. Se queste due probabilità sono perfettamente paragonabili fra loro, come egli asserisce, è desiderabile che se ne chiarisca il come e il perchè. E soprattutto che la quistione venga risolta alla stregua d'una definizione accettabile, se sarà possibile il trovarla (*).

G. FRATTINI.

SOPRA UNA QUISTIONE DI PROBABILITÀ

TRATTATA RECENTEMENTE DAL PROF. MURER (**)

1. In infiniti modi si può stabilire una corrispondenza univoca tra i punti d'una superficie e le diverse forme di triangoli e se essa è tale che i punti corrispondenti ai triangoli acutangoli, p. es., formino una parte della considerata superficie, il rapporto di tal parte

(*) La redazione ritiene opportuno segnalare il legame esistente fra questo ed il successivo articolo, del Prof. Giudice, quantunque sorti indipendentemente l'uno dall'altro.

(**) Periodico di Matematica. — Novembre-dicembre 1889.

alla rimanente può prendere qualsiasi valore se sia arbitraria la scelta della corrispondenza tra i punti della superficie e gli elementi, arbitrariamente scelti, sufficienti per determinare i tre angoli d'un triangolo.

In molte questioni che contemplano infiniti casi possibili si offre spontaneamente il significato da attribuirsi alla parola probabilità, significato da considerarsi come implicitamente accettato da chi non avesse dichiarato altrimenti. Ma anche per tali questioni, sebbene non possa dirsi assolutamente necessaria, è molto utile una dichiarazione esplicita rigorosa, sia per impedire che i poco esperti errino, sia perchè tra le infinite definizioni concepibili per ogni singola questione, nella quale siano da considerare infiniti casi possibili, non sempre se ne trova una che s'imponga a preferenza delle altre e, seppure c'è, si è liberi di non sceglierla. In quest'ultimo caso però si adatta quasi sempre artificiosamente, senza criterio logico, la definizione di probabilità ad una rappresentazione preconcepita invece di adattare una rappresentazione al concetto di probabilità più naturale per la questione da trattarsi.

Per studiare la frequenza con cui certe condizioni sono soddisfatte dalle soluzioni della

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} + x_n = p$$

dove p è un numero dato ed $x_1 x_2 \dots x_n$ sono arbitrarie, si cerchi la probabilità che tali condizioni siano soddisfatte da una delle soluzioni, in numero finito, di quell'equazione nell'ipotesi che $x_1 x_2 \dots x_n$ debbano avere una comune misura ϵ , necessariamente parte aliquota di p , e poi vedasi di determinare il limite di tal probabilità, se esiste, col tendere di ϵ a zero. Se si può avere una rappresentazione geometrica delle soluzioni e queste finiscono per formare uno spazio divenendo infinitesima ϵ , si potrà dire che il limite del rapporto dei numeri delle soluzioni di due classi è dato dal rapporto degli spazii corrispondenti solamente se si sia potuto riconoscere che, divenendo infinitesima ϵ , i punti corrispondenti alle soluzioni delle due classi che si considerano finiscono per formare uno spazio di densità costante.

Questi sono precisamente i criterii di cui si servì sempre il Prof. Cesàro per non discostarsi mai dal concetto più naturale di probabilità nelle questioni analoghe a quella della rottura del diamante da lui trattata con ammirabile eleganza.

2. Se $x y z$ si fanno proporzionali alle distanze d'un punto mobile nell'interno di un triangolo equilatero dai lati del medesimo, le soluzioni di

$$x + y + z = \pi$$

date da valori di $x y z$ aventi per comune misura $\frac{\pi}{n}$ sono date dai punti d'intersezione delle parallele ai lati del triangolo condotte pei punti che dividono le tre altezze in n parti eguali; esse quindi sono uniformemente distribuite nel piano dove occupano i vertici d'una rete di triangoli equilateri di lati tutti eguali alla n^{ma} parte del lato del primo triangolo equilatero. Se con $A_1 A_2$ si indicano due porzioni, superficiali, di questo, con N_1 ed N_2 i numeri di nodi dell'accennata rete compresi in $A_1 A_2$, rispettivamente, con t_n la superficie d'uno dei triangoli equilateri della rete, con T la superficie del triangolo dato, si ha: (*)

$$n^2 \cdot t_n = T$$

$$\lim_{n=\infty} N_1 \cdot 2t_n = A_1$$

$$\lim N_2 \cdot 2t_n = A_2$$

$$\lim \frac{N_1}{N_2} = \frac{A_1}{A_2}.$$

Così è giustificata la rappresentazione geometrica per le classi di soluzioni distribuite in superfici.

Similmente si giustifica la rappresentazione geometrica delle soluzioni della

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1} = a$$

per mezzo dell' $(n+1)$ -edroide n -uplo per le classi di soluzioni distribuite in porzioni del medesimo aventi, come esso, n dimensioni.

Con questo però non resta punto stabilito che i numeri delle

(*) V. P. G. LEJEUNE DIRICHLET — *Lezioni sulla teoria dei numeri*, pubbl. da Dedekind, tradotte da Fallofer — Venezia, 1881, pag. 306.

soluzioni distribuite in spazii d'un minor numero di dimensioni siano ancora proporzionali ad essi spazii. Si riconosce anzi facilmente che la distribuzione delle soluzioni in spazii di meno di n dimensioni contenuti nell' $(n + 1)$ -edroide n -uplo dipende dal modo di tendere a zero della quantità ϵ di cui si è parlato sopra.

3. Per poter studiare rigorosamente anche le soluzioni che nella rappresentazione geometrica formerebbero spazii con meno dimensioni di quello formato dall'insieme di tutte le soluzioni, pongo questa definizione: « Per probabilità che una soluzione dell'equazione

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$$

appartenga ad una data classe intendesi il limite, se esiste, della probabilità che una soluzione appartenga a tal classe quando $x_1, x_2, \dots, x_n$ debbano esser multiple di $\frac{p}{m!}$ dove m è variabile che deve tendere all'infinito prendendo successivamente i valori 1 2 3 4 5 6 »

Se si rappresentano le soluzioni della

$$x + y + z = \pi$$

date da valori di x, y, z aventi per comune misura $\frac{\pi}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot k}$ si riconosce facilmente che $36k + 1$ nodi cadono sulle altezze e $36k$ cadono sul perimetro del triangolo che ha i vertici nei baricentri dei lati del triangolo equilatero; ma quei nodi a tre a tre, escluso il punto delle altezze, il quale corrisponde alla forma regolare, danno un medesimo triangolo isoscele per cui danno complessivamente $12k$ triangoli isosceli dei quali uno solo è anche rettangolo, non contando il triangolo con un angolo piatto e due nulli che corrisponde ai vertici del triangolo di riferimento: gli altri nodi a sei a sei corrispondono ad un medesimo triangolo rettangolo, esclusi i tre vertici che corrispondono a triangolo birettangolo con un angolo nullo ed i tre punti di mezzo dei lati che corrispondono al triangolo rettangolo isoscele, per cui danno complessivamente $6k$ triangoli rettangoli dei quali uno solo è isoscele, non contando quello birettangolo. Facendo crescere k indefinitamente riconosciamo così che

il rapporto delle probabilità che un triangolo sia isoscele o rettangolo è 2 e non $\sqrt{3}$ come afferma il Prof. Murer; ciò è dovuto precisamente al non aver considerato che i nodi hanno diversa potenza sui segmenti che uniscono i baricentri dei lati e sulle altezze e che vi sono diversamente distribuiti.

Questo risultato si può confermare direttamente con molta facilità. Sia t un triangolo rettangolo scaleno con gli angoli acuti α β ; indichiamo con T' T'' i triangoli isosceli che hanno angoli al vertice eguali, rispettivamente, a 2α 2β e facciamo corrispondere T' e T'' a t ; il triangolo isoscele con l'angolo al vertice λ corrisponde così al triangolo rettangolo con un angolo acuto eguale a $\frac{\lambda}{2}$ e ad esso solo, ed all'insieme dei triangoli isosceli con angoli multipli di $\frac{\pi}{2n}$ corrisponde l'insieme dei triangoli rettangoli con angoli pure multipli di $\frac{\pi}{2n}$ perchè se l'angolo alla base d'un triangolo isoscele è multiplo di $\frac{\pi}{2n}$, è multiplo di questo anche la metà del suo angolo al vertice. Siccome c'è un solo triangolo rettangolo isoscele, riconosciamo così che la frequenza dei triangoli isosceli è doppia di quella dei triangoli rettangoli.

4. Per studiare i quadrangoli inscritti ad un cerchio si possono fare i loro angoli proporzionali alle parti in cui un parallelogrammo è diviso dai segmenti che uniscono un suo punto ai vertici; l'angolo retto è così rappresentato dalla quarta parte della superficie del parallelogrammo: se i punti corrispondenti alle soluzioni di due classi formano due superfici, le probabilità che una soluzione appartenga all'una od all'altra classe stanno fra loro come queste due superfici: non si può dire altrettanto per le soluzioni distribuite sopra linee. Per maggiore semplicità si potrebbe fare gli angoli proporzionali alle distanze d'un punto mobile nell'interno d'un quadrato dai lati del medesimo: l'angolo retto sarà così rappresentato da una distanza eguale alla metà del lato del quadrato.

5. Sia ABC un triangolo equilatero, M un punto interno ad esso ed $A'B'C'$ le proiezioni ortogonali di questo punto su BC CA

A B. Si riconosce immediatamente essere

$$\begin{aligned} \text{ang. } AMC &= ABC + BCM + MAB \\ &= ABC + A'B'M + MB'C' = ABC + A'B'C' \\ \text{ang. } AMB &= ACB + A'C'B' \quad \text{ang. } BMC = BAC + B'A'C' \end{aligned}$$

per cui ciascun angolo di $A'B'C'$ sarà compreso fra 0 e $\frac{2}{3} \cdot \pi$.

Sia ora:

$$\begin{aligned} \alpha &\leq \frac{2}{3} \pi & \beta &\leq \frac{2}{3} \pi & \gamma &\leq \frac{2}{3} \pi \\ \alpha + \beta + \gamma &= \pi. \end{aligned}$$

Supporremo che nessuno degli angoli $\alpha \beta \gamma$ sia nullo; i triangoli con qualche angolo nullo corrispondono ai punti del perimetro del triangolo di riferimento. Se $\alpha \beta \gamma$ fossero tra loro eguali si avrebbe la forma regolare corrispondente al baricentro del triangolo equilatero di riferimento. Supponiamo che non siano tutti uguali; almeno uno sarà maggiore di $\frac{\pi}{3}$; sia

$$\alpha > \frac{\pi}{3},$$

Congiungiamo C con B ed A mediante archi i quali siano capaci di $\alpha + \frac{\pi}{3}$ e $\beta + \frac{\pi}{3}$, rispettivamente, e si trovino dalla parte del triangolo equilatero rispetto alle loro corde. Indicando con λ e μ gli angoli che quegli archi formano con CB CA , si ha:

$$\lambda = \frac{2}{3} \pi - \alpha \quad \mu = \frac{2}{3} \pi - \beta.$$

Essendo $\alpha > \frac{\pi}{3}$ l'arco CB è tutto interno al triangolo, ed essendo

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &< \pi \\ \text{è} \quad \lambda + \mu &> \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

per cui i due archi CB CA si tagliano in un punto interno al triangolo di riferimento: per ciò che sopra fu detto, il triangolo corrispondente a questo punto ha eguali ad α e β gli angoli coi vertici su BC CA , rispettivamente, epperò eguale a γ quello che ha

il vertice su AB . Adunque, ogni triangolo che non ha nessun angolo maggiore di $\frac{2}{3}\pi$ ha un punto corrispondente interno al triangolo equilatero.

Siccome quando è data una forma di triangolo resta da fissar l'ordine in cui i vertici debbono cadere sui lati, così è chiaro che ad un medesimo triangolo corrispondono sei o tre od un punto secondo che esso è scaleno, isoscele od equilatero, precisamente come nella rappresentazione di cui ha fatto uso il D.r Murer. Con questa rappresentazione i punti del triangolo curvilineo formato dagli archi sottesi dai lati del triangolo equilatero e tangenti alle bisettrici degli angoli corrispondono ai triangoli acutangoli, i punti del perimetro di tal triangolo curvilineo corrispondono ai triangoli rettangoli e gli altri punti del triangolo di riferimento corrispondono ai triangoli con un angolo compreso fra $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{2}{3}\pi$. I punti corrispondenti ai triangoli con angoli multipli di $\frac{\pi}{3n}$ e due angoli compresi fra $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2}{3}\pi$ sono i nodi della rete formata dagli archi congiungenti A con B e tangenti alle rette che dividono l'angolo BAC in n parti eguali e di quelli tangenti alle stesse rette congiungenti A con C ; essi nodi non sono distribuiti uniformemente per cui, se la probabilità sia intesa nel senso dichiarato sopra, non si può ammettere nemmeno il principio delle superfici, con questa nuova corrispondenza. Ciò si riconosce ancora meglio eguagliando il rapporto delle superfici che nella corrispondenza stabilita dal Prof. Cesàro rappresentano due classi di triangoli al rapporto delle superfici che, nell'ultima corrispondenza, rappresentano le stesse classi: si possono così avere facilmente delle equazioni semplicissime, a coefficienti interi, del 2° grado in π mentre si sa che questo numero è trascendente.

Si dimostra senza difficoltà il teorema seguente che comprende l'ultima corrispondenza considerata: « Se un triangolo inscritto in uno dato ha per vertici le proiezioni ortogonali, sui lati di questo, d'un punto del cerchio circoscritto al medesimo, l'angolo che ha il vertice in questo punto ed intercetta sulla circonferenza circoscritta lo stesso arco intercetto da un angolo del triangolo dato è eguale alla somma di quest'angolo con l'opposto del triangolo inscritto. »

Si possono quindi rappresentare tutte le diverse forme di triangoli facendo corrispondere ad un punto qualunque del cerchio circoscritto ad un triangolo di riferimento, il triangolo che ha per vertici le proiezioni ortogonali di quel punto sui lati di questo. Ai punti del cerchio circoscritto corrispondono, pel teorema ora enunciato, i triangoli con un angolo piatto e due nulli come già era noto per una proposizione di Simson. I punti corrispondenti ai triangoli direttamente simili al dato sono il centro del cerchio circoscritto ed i due punti di Brocard di esso triangolo dato, pei quali il teorema enunciato mette subito in evidenza questa proprietà: Un punto di Brocard d'un triangolo qualunque ABC è punto d'intersezione degli archi circolari congiungenti B con A e con C e tangenti a BC ed a CA , rispettivamente; l'altro punto di Brocard è punto d'intersezione degli archi circolari congiungenti A con B e con C e tangenti ad AC ed a BC rispettivamente.

F. GIUDICE.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI

b), 46, 48, 53, 54 e 55

b). *Il luogo dei punti, del piano di un triangolo dato, tali che i piedi delle perpendicolari, condotte da uno qualunque di essi ai tre lati, formino un triangolo di data area, è una circonferenza concentrica a quella circoscritta al triangolo dato.*

(G. LORIA).

Dimostrazione del Prof. S. Catania.

Siano p, q, r i numeri (positivi) che misurano le perpendicolari abbassate da un punto P del luogo cercato rispettivamente sui lati a, b, c del triangolo dato A, B, C ed S, T le aree del triangolo dato e del triangolo che ha per vertici i piedi di quelle tre perpendicolari; si avrà

$$\begin{aligned} pa + qb + rc &= 2S, \\ qr \sin A + rp \sin B + pq \sin C &= 2T. \end{aligned}$$

Eliminando r si ottiene

$$\begin{aligned} p^2 a \sin B + q^2 b \sin A + pq (a \sin A + b \sin B - c \sin C) \\ - 2Sq \sin A - 2Sp \sin B + 2cT = 0. \end{aligned}$$

Siccome

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

eliminando a, b, c , e dividendo poi per $2R \sin A \sin B$, risulterà

$$p^2 + q^2 + pq \cdot \frac{\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C}{\sin A \sin B} - \frac{Sp}{R \sin A} - \frac{Sq}{R \sin B} + \frac{2T \sin C}{\sin A \sin B} = 0,$$

od anche per essere

$$\frac{\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C}{\sin A \sin B} = 2 \cos C, S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C:$$

$$[1] \quad p^2 + q^2 + 2pq \cos C - \frac{Sp}{R \sin A} - \frac{Sq}{R \sin B} + \frac{4R^2 T \sin^2 C}{S} = 0.$$

Sieno rispettivamente α e β i numeri che misurano le perpendicolari abbassate dal centro O della circonferenza K circoscritta al triangolo ABC sui lati a e b , ed M ed N i loro piedi. Si deduce facilmente, dalla considerazione del quadrilatero $OMCN$, che

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos C = R^2 \sin^2 C.$$

E similmente, considerando il quadrilatero che ha due vertici in P ed O , e di cui i lati uscenti da O sieno paralleli ad a e b , e quelli uscenti da P sieno perpendicolari agli stessi lati a e b , si ottiene

$$(p - \alpha)^2 + (q - \beta)^2 + 2(p - \alpha)(q - \beta) \cos C = \rho^2 \sin^2 C$$

avendo rappresentato con ρ il numero che misura la distanza OP .

Sviluppando, tenendo conto dell'equazione precedente e della [1], si avrà

$$-2p\alpha - 2q\beta - 2p\beta \cos C - 2q\alpha \cos C + R^2 \sin^2 C$$

$$+ \frac{Sp}{R \sin A} + \frac{Sq}{R \sin B} - \frac{4R^2 T \sin^2 C}{S} = \rho^2 \sin^2 C.$$

Ora $\alpha = R \cos A$, $\beta = R \cos B$, onde

$$-2p\alpha - 2p\beta \cos C + \frac{Sp}{R \sin A} = -2pR(\cos A + \cos B \cos C) + \frac{Sp}{R \sin A}$$

$$= -2pR \sin B \sin C + \frac{Sp}{R \sin A} = -\frac{Sp}{R \sin A} + \frac{Sp}{R \sin A} = 0$$

e similmente

$$-2q\beta - 2q\alpha \cos C + \frac{Sq}{R \sin B} = 0.$$

Si avrà quindi

$$R^2 \sin^2 C - \frac{4R^2 T \sin^2 C}{S} = \rho^2 \sin^2 C$$

ed infine

$$[2] \quad \rho = R \sqrt{1 - \frac{4T}{S}}.$$

Nello stabilire il primitivo sistema di equazioni si è tacitamente supposto essere il punto P interno al triangolo ABC . Se però P è esterno, ma però interno alla circonferenza K , avendo considerato i soli valori assoluti di p, q, r , si avrà il sistema

$$\begin{aligned} pa + qb - rc &= 2S \\ -qr \operatorname{sen} A - rp \operatorname{sen} B + pq \operatorname{sen} C &= 2T, \end{aligned}$$

che si può scrivere

$$\begin{aligned} pa + qb + (-r)c &= 2S \\ (-r)q \operatorname{sen} A + (-r)p \operatorname{sen} B + pq \operatorname{sen} C &= 2T \end{aligned}$$

da cui eliminando $(-r)$ si ricade nel risultato precedente.

Supponiamo ora che P sia esterno alla circonferenza K ; avremo il sistema

$$\begin{aligned} pa + qb - rc &= 2S \\ qr \operatorname{sen} A + rp \operatorname{sen} B - pq \operatorname{sen} C &= 2T \end{aligned}$$

od un suo equivalente. Questo sistema si può scrivere

$$\begin{aligned} pa + qb + (-r)c &= 2S \\ (-r)q \operatorname{sen} A + (-r)p \operatorname{sen} B + pq \operatorname{sen} C &= -2T \end{aligned}$$

e si ricade nel risultato [2], cambiando però in esso il segno a T . Su dunque l'area T si considera soltanto in valore assoluto, il luogo cercato si compone di due circonferenze, i cui raggi sono espressi dalla formola

$$\rho = R \sqrt{1 \pm \frac{4T}{S}}$$

e di queste due circonferenze una è interna alla circonferenza K e l'altra è esterna.

Se $T = 0$, sarà $\rho = R$ e si ricade nel teorema di SIMSON.

Si noti che facendo variare ρ da 0 ad R , il triangolo $A'B'C'$, che ha per vertici i piedi delle perpendicolari abbassate da un punto del luogo sui lati del triangolo ABC , varia da $\frac{1}{4}S$ a 0, e risulta dello stesso segno del triangolo ABC . Risulta invece di segno opposto se ρ cresce da R a ∞ . Considerando perciò come positiva l'area del triangolo ABC , l'area T del triangolo $A'B'C'$ risulterà positiva per i punti interni alla circonferenza K , e negativa per i punti esterni, passando per zero per i punti della circonferenza K .

In quest'ipotesi il luogo cercato è costituito da una sola circonferenza di circolo, di raggio

$$\rho = R \sqrt{1 - \frac{4T}{S}}$$

E si vede che questa circonferenza esiste per tutti i valori positivi di T , inferiori a $\frac{1}{4}S$, e per tutti i negativi di T .

46. Dimostrare che, se l'equazione

$$x^6 + 3ax^5 + \left(3a^2 - \frac{6}{a}\right)x^4 - 20x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

ha tutte le radici positive, esse devono essere eguali ad 1. (D. BESSO).

Dimostrazione del Prof. F. Viaggi. (*)

Chiamo $f(x)$ il primo membro dell'equazione proposta; se $f(x) = 0$ ha tutte le radici reali e positive, lo stesso avverrà, pel teorema di ROLLE, di ciascuna equazione ottenuta eguagliando a zero una derivata di $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{72}{a} (5ax^2 + 5a^2x + a^3 - 2)$$

s'annulla pei valori

$$x_1 = -\frac{5a^2 + \sqrt{5a(a^3 + 8)}}{10a}, \quad x_2 = -\frac{5a^2 - \sqrt{5a(a^3 + 8)}}{10a}$$

che sono reali e positivi se

$$a^3 + 8 \leq 0 \quad [1]$$

il caso dell'eguaglianza corrispondendo a $x_1 = x_2 = 1$.

Pel teorema di ROLLE le radici di $f''(x) = 0$ debbono essere separate dai valori $+\infty, x_1, x_2, 0$, ora

$$f''(+\infty) = +; \quad f''(x_1) = -\frac{12}{a}x_2(a^3 + 8);$$

$$f''(x_2) = -\frac{12}{a}x_1(a^3 + 8); \quad f''(0) = -$$

quindi non può supporre $a^3 + 8 < 0$, perchè in tale ipotesi $f''(x) = 0$ non avrebbe che una sola radice reale; bisogna dunque che sia $a^3 + 8 = 0$, ossia $a = -2$, nel qual caso la radice doppia della $f'(x) = 0$ è comune alla $f''(x) = 0$ e quindi è tripla per quest'ultima.

La $f''(x) = 0$ non può avere radici reali distinte, perchè tali sarebbero quelle di $f''(x) = 0$, e, avendo radici multiple, almeno una di esse dev'essere 1, la quale essendo tripla per quest'ultima è quadrupla per la precedente: così $f''(x) = 0$ ha tutte le radici eguali ad 1.

Allo stesso modo si dimostra che $f'(x) = 0$, ed $f(x) = 0$ hanno tutte le radici eguali ad 1 (**).

(*) Altra soluzione pervenne dal Sig. Prof. U. Scarpi.

(**) Questa quistione è suscettibile anche di una dimostrazione elementare.

48. Assegnare il limite al quale tende la funzione

$$n^{m-1} \left\{ \frac{1}{(n+1)^m} + \frac{1}{(n+2)^m} + \frac{1}{(n+3)^m} + \dots + \frac{1}{(n+n)^m} \right\}$$

quando n tende all'infinito, nell'ipotesi che m sia un intero positivo costante.

(D. BESSO).

Soluzione del Prof. L. Merante (*).

Dall'eguaglianza

$$\left(\frac{1}{b^{m-1}} - \frac{1}{a^{m-1}} \right) : (a-b) = \frac{1}{a^{m-1}b} + \frac{1}{a^{m-2}b^2} + \dots,$$

nell'ipotesi $a > b$, segue

$$(m-1) \frac{1}{a^m} < \left(\frac{1}{b^{m-1}} - \frac{1}{a^{m-1}} \right) : (a-b) < (m-1) \frac{1}{b^m},$$

e fatto $a = b + 1$ abbiamo

$$(m-1) \frac{1}{(b+1)^m} < \frac{1}{b^{m-1}} - \frac{1}{(b+1)^{m-1}}, \quad [1]$$

$$(m-1) \frac{1}{b^m} > \frac{1}{b^{m-1}} - \frac{1}{(b+1)^{m-1}}. \quad [2]$$

Facendo nella [1] $b = n, n+1, \dots, n+n-1$ e sommando, e nella [2] $b = n+1, n+2, \dots, n+n$ e sommando, otteniamo la limitazione

$$\frac{1}{(n+1)^{m-1}} - \frac{1}{(2n+1)^{m-1}} < (m-1) \left\{ \frac{1}{(n+1)^m} + \frac{1}{(n+2)^m} + \dots + \frac{1}{(n+n)^m} \right\} < \frac{1}{n^{m-1}} - \frac{1}{2n^{m-1}}$$

ossia

$$0 < (m-1) \left\{ \frac{1}{(n+1)^m} + \frac{1}{(n+2)^m} + \dots + \frac{1}{(n+n)^m} \right\} + \frac{1}{(2n+1)^{m-1}} - \frac{1}{(n+1)^{m-1}} < \frac{1}{n^{m-1}} - \frac{1}{2n^{m-1}} + \frac{1}{(2n+1)^{m-1}} - \frac{1}{(n+1)^{m-1}}$$

e moltiplicando per $\frac{n^{m-1}}{n-1}$, abbiamo

$$0 < n^{m-1} \left\{ \frac{1}{(n+1)^m} + \frac{1}{(n+2)^m} + \dots + \frac{1}{(n+n)^m} \right\} + \frac{1}{(m-1) \left(2 + \frac{1}{n} \right)^{m-1}} - \frac{1}{(m-1) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{m-1}} < \frac{1}{m-1} - \frac{1}{(m-1) 2^{m-1}} + \frac{1}{(m-1) \left(2 + \frac{1}{n} \right)^{m-1}} - \frac{1}{(m-1) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{m-1}}.$$

(*) Altre soluzioni vennero inviate dal Sigg. Prof. S. Catania, F. Fiaggi

Quando n tende all'infinito il 3° membro tende a zero, quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{m-1} \left\{ \frac{1}{(n+1)^m} + \frac{1}{(n+2)^m} + \dots + \frac{1}{(n+n)^m} \right\} = \frac{1}{m-1} \left(1 - \frac{1}{2^{m-1}} \right).$$

53°. *Dati di posizione nel piano n punti, costruire un poligono i cui lati passino per i punti dati e sieno divisi da questi, nel medesimo senso, in parti aventi un rapporto uguale a quello di due segmenti dati.*

Mostrare che il problema ammette un'infinità di soluzioni o nessuna se n è pari e i segmenti dati sono eguali tra loro, una soluzione unica in tutti gli altri casi. (A. LUGLI).

Soluzione del Sig. G. M. Nobile alunno del R. Istituto tecnico di Chieti.

Siano $P_1, P_2, \dots, P_n$ punti dati in un piano, i quali debbano dividere nel rapporto k i lati di un poligono da costruire; k si suppone un numero algebrico rappresentante il rapporto dei segmenti dati; dunque negativo se i punti dati si suppongono interni ai lati, positivo se esterni.

Preso ad arbitrio un punto A_1 , sulla congiungente $A_1 P_1$ si determini il punto A_2 tale che sia $\frac{A_1 P_1}{A_2 P_1} = k$, non c'è n'è che uno solo; sulla congiun-

gente $A_2 P_2$ si determini analogamente il punto A_3 tale che sia $\frac{A_2 P_2}{A_3 P_2} = k$,

e così di seguito: si costruisca cioè la poligonale $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$ i cui lati siano successivamente e nello stesso senso divisi da $P_1, P_2, \dots, P_n$ nel rapporto k . Se A_1 si fa muovere su una retta, $A_2, A_3, \dots, A_{n+1}$ si muovono ripetutamente su rette parallele a quella, generando punteggiate omotetiche; e, come caso particolare, se A_1 scorre lungo la $A_1 A_{n+1}$ anche A_{n+1} scorre lungo la stessa retta. Di più, se $A_1' A_2' \dots A_{n+1}'$ è una seconda posizione della poligonale, si ha algebricamente:

$$\frac{A_1 A_1'}{A_2 A_2'} = k, \frac{A_2 A_2'}{A_3 A_3'} = k, \dots, \frac{A_n A_n'}{A_{n+1} A_{n+1}'} = k.$$

Dalle quali, moltiplicando e riducendo:

$$\frac{A_1 A_1'}{A_{n+1} A_{n+1}'} = k^n \dots \dots \dots [1].$$

Se A_1 ed A_{n+1} coincidono in un punto, il poligono $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$ soddisfa alla condizione richiesta e la [1] mostra che, se k^n è diverso da 1, non può coincidere mai A_1' con A_{n+1}' ; se invece $k^n = 1$ ossia, non potendo essere $k = 1$, imperocchè ciò corrisponderebbe ad ammettere che i punti dati fossero a distanza infinita sui lati, se è $k = -1$ ed n pari, comunque si scelga A_1' esso coincide sempre con A_{n+1}' ; il che significa che in generale il problema, se ha una soluzione, non ne ammette altre; ma, se i punti dati sono i punti

medii dei lati del poligono e sono in numero pari, ne ammette infinite potendosi scegliere il primo vertice ad arbitrio.

Se poi A_1 non coincide con A_{n+1} , sulla retta $A_1 A_{n+1}$ si prenda il punto O tale che sia:

$$\frac{A_1 O}{A_{n+1} O} = k^n \dots \dots \dots [2].$$

Se come primo vertice si prende O , ossia si fa coincidere A_1' con O , anche l'ultimo vertice della poligonale cade in O , perchè da [1] e [2] si ha:

$$\frac{A_1 O}{A_{n+1} A'_{n+1}} = \frac{A_1 O}{A_{n+1} O}.$$

Ed ora se $k^n = 1$, con $k = -1$ e quindi n pari, il punto O , determinato dalla [2], cade a distanza infinita.

Dunque in generale il problema ammette soluzione ed una sola; quando poi è $k^n = 1$, manca ogni soluzione o ve ne sono infinite.

Corollario. — I punti medii dei lati d'un poligono piano di $2m$ lati, non formano un poligono generale ma assoggettato ad una condizione a cui può darsi il seguente enunciato: Se il poligono $P_0 P_1 P_2 \dots P_{m-1} P_m P_{-(m-1)} \dots P_{-2} P_{-1}$ ha i vertici nei punti medii dei lati d'un poligono, presi a considerare due vertici opposti P_0, P_m , se $C_1, C_2, \dots, C_{m-1}$ sono punti medii dei segmenti $P_1 P_{-1}, P_2 P_{-2}, \dots, P_{m-1} P_{-(m-1)}$, e si costruisca di P_0 il simmetrico rispetto a C_1 , del nuovo punto il simmetrico rispetto a C_2 , e così di seguito, l'ultimo punto ottenuto deve coincidere con P_m .

54°. Se con $\binom{n}{r}$ s'indica il numero delle combinazioni di n elementi ad r ad r , dimostrare la relazione:

$$\binom{m-1}{h} + \binom{m-1}{h+1} \frac{m-h}{m-h-1} = \frac{m+1}{m} \binom{m}{h+1}.$$

(A. LUGLI).

Soluzione del Sig. *G. Marsilia*, allievo della R. Accademia navale di Livorno (*).

Si verifica facilmente che

$$\binom{m-1}{h+1} \frac{m}{m-h-1} = \binom{m}{h+1},$$

(*) Soluzioni sostanzialmente analoghe da *C. Aiello* (R. Liceo V. E. di Napoli), *A. Baldassarre* (R. Istituto tecnico di Bari), *A. Coacci* (R. Istituto tecnico di Roma), *S. Lopriore* (R. Liceo di Bari), *O. Manfredi* (R. Istituto tecnico di Reggio Emilia), *P. Marano* (studente privato a Catania), *P. Patrassi* (R. Istituto tecnico di Terni), *G. Piuma* (R. Liceo Colombo di Genova).

onde

$$\binom{m-1}{h+1} \frac{1}{m-h-1} = \frac{1}{m} \binom{m}{h+1}.$$

Sommando questa equivalenza coll'altra notissima

$$\binom{m-1}{h+1} + \binom{m-1}{h} = \binom{m}{h+1}$$

si ha

$$\binom{m-1}{h} + \binom{m-1}{h+1} \frac{m-h}{m-h-1} = \frac{m+1}{m} \binom{m}{h+1}.$$

55°. *Dimostrare che l'espressione*

$$4^n - 3^{n+1} + 3 \cdot 2^n - 1$$

è multipla di 6, qualunque sia l'intero positivo n, e che il quoziente della sua divisione per 6 è > 0 per ogni valore di n > 2. (A. LUGLI).

Dimostrazione di C. Aiello (R. Liceo V. E. di Napoli), A. Baldassarre (R. Istituto tecnico di Bari), P. Marano (studente privato a Catania), Z. Mengoni (R. Accademia navale di Livorno).

L'espressione data può scriversi nei due modi

$$(4^n - 1^n) - 3(3^n - 2^n) \text{ e } 4^n + 3 \cdot 2^n - (3^{n+1} + 1)$$

e poichè $4^n - 1^n$ è divisibile per $4 - 1 = 3$ e $3^{n+1} + 1$ è un numero pari, risulta dal primo modo di scrittura che essa è divisibile per 3, dal secondo che è divisibile per 2; l'espressione data è quindi multipla di 6.

È facile verificare che per $n = 1, 2$ l'espressione considerata assume il valore zero, quindi, per rispondere alla seconda parte della quistione, basterà dimostrare che per $n > 2$, essa è > 0 .

Ci serviremo del metodo d'induzione; supponendo cioè che sia

$$4^n - 3^{n+1} + 3 \cdot 2^n - 1 > 0,$$

dimosteremo che è anche

$$4^{n+1} - 3^{n+2} + 3 \cdot 2^{n+1} - 1 > 0.$$

Quest'ultima disuguaglianza è certamente vera se (dietro l'ipotesi fatta) è vera l'altra :

$$(4^{n+1} - 3^{n+2} + 3 \cdot 2^{n+1} - 1) - (4^n - 3^{n+1} + 3 \cdot 2^n - 1) > 0,$$

ossia, dopo avere ridotto e diviso per 3, se

$$4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n > 0,$$

oppur anche se

$$4^n - 3^n > 3^n - 2^n,$$

o finalmente se

$$4^{n-1} + 4^{n-2} \cdot 3 + \dots + 3^{n-1} > 3^{n-1} + 3^{n-2} \cdot 2 + \dots + 2^{n-1},$$

disuguaglianza evidentemente giusta.

Dunque se il valore della proposta espressione è > 0 per una certa n lo è pure per $n+1$ e poichè per $n=3$ questo valore è 6, così il valore medesimo sarà > 0 per ogni valore di $n > 2$. Lo stesso accadrà poi del quoziente della divisione per 6.

I giovani studenti *G. Piuma* (del R. Liceo Colombo di Genova) e *S. Lopriore* (R. Liceo di Bari) dimostrano la seconda parte del teorema proposto nel modo seguente. — Per $n=3$ si verifica subito che

$$4^n - 3^{n+1} + 3 \cdot 2^n - 1 > 0,$$

sicchè basterà dimostrare che per $n \geq 4$ è

$$4^n - 3^{n+1} - 1 > 0 \quad \text{o} \quad 4^n - 3^{n+1} > 1.$$

Ora $4^4 - 3^5 > 1$, sarà dunque evidentemente $4^4 \cdot 4 - 3^5 \cdot 3 > 4^4 - 3^5 > 1$, $4^5 \cdot 4 - 3^6 \cdot 3 > 4^5 - 3^6 > 1$, ecc., perciò il quoziente della divisione per 6 della data espressione, per $n > 2$, è un intero positivo (*).

Si dichiara inoltre ricevimento delle soluzioni seguenti: quistione **56'** dal Sig. *C. Aiello, G. Alessio, A. Baldassarre, G. Bitonti, G. di G. Candido, A. Colorni, G. D'Asdia, E. Gabrielli, A. Graciotti, L. Isola, A. Longo, S. Lopriore, P. Marano, G. Marcantoni, S. Martucci, G. M. Nobile, P. Patrassi, G. Prinzi, M. Righetto, P. P. Rizzuti, R. Salvadori, G. Scarpini, E. Segrè, A. Sidoli, F. Tallarico*; **57'** *R. Cassòli, G. D'Asdia, S. Lopriore, O. Manfredi*; **58'** *A. Baldassarre, G. Bitonti, G. D'Asdia, S. Lopriore, O. Manfredi, G. M. Nobile*, **59.** *S. Catania, L. Carlini, S. Gatti, M. Misani, G. Riboni, G. Russo, F. Viaggi*; **60.** *M. Misani, G. Riboni, G. Russo, F. Viaggi*; **61.** *F. Viaggi*; **62'** *A. Baldassarre, G. D'Asdia, O. Manfredi, G. M. Nobile*; **63'** *C. Aiello, G. Bitonti, E. Goti, S. Lopriore, P. Marano, A. Mucci, G. M. Nobile, G. Paoli, G. Prinzi, P. P. Rizzuti, R. Salvadori, A. Sidoli* — soluzioni alle quali verrà data evasione, insieme a quelle arretrate, col fascicolo venturo.

La Direzione.

(*) Inviarono dimostrazioni di questa quistione ancora i giovani *G. Bitonti, G. Gallucci, R. Malfare* (Istituto tecnico di Catanzaro), *A. Coacci, Ricciarda De Albini, G. Vincenti* (R. Istituto tecnico di Roma), *M. Righetto* (Istituto tecnico di Spessa), *G. A. Venturi* (R. Istituto tecnico di Reggio Emilia).

QUISTIONI PROPOSTE (*)

64. Risolvere il seguente sistema d'equazioni

$$\begin{aligned} ax^2 + by^2 + \alpha(ax - by) + (a + b)(1 + \alpha - y)x - \\ (a + b)(1 + \alpha)y + \alpha(a + b)(1 + \alpha) = 0 \\ 2y^3 + \{x^2 + (a + b)^2 - 2y^2\}x - \\ \{\alpha^2 + (a + b)^2 - 2x^2\}y - 2x^3 = 0, \end{aligned}$$

nelle quali α , a , b esprimono quantità note.

S. GATTI.

65. Fra tutti i triangoli sferici che hanno un angolo di 90° il lato ad esso opposto costante, e gli altri due lati minori di 90° , qual è quello di massima area?

66*. Trovare una formola pel termine $n.^\circ$ della serie $a, b, a, b, a, b, \dots$

67. Trovare una formola pel termine $n.^\circ$ della serie $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, \dots$

68. Se il punto d'incontro degli archi bisettori degli angoli d'un triangolo sferico coincide col punto d'incontro degli archi mediani dei lati, è necessario che il triangolo sia equilatero?

D. BESSO.

69*. In un quadrilatero qualunque circoscritto ad un cerchio, la differenza dei rettangoli dei lati opposti è uguale al rettangolo della somma e della differenza delle congiungenti i punti medi dei lati opposti.

(*) Il tempo utile per l'invio delle soluzioni delle quistioni nuove e di quelle rimaste insolute scade un mese e mezzo dopo la chiusura della redazione del fascicolo. La data di chiusura si troverà nell'ultima pagina di ciascun numero del Periodico.

Le quistioni contrassegnate con asterisco sono esclusivamente indirizzate agli alunni delle nostre scuole.

70*. Sommando la serie finita

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$$

e facendo poi $x = \frac{n+1}{n}$, si ottiene l'identità:

$$1 + 2\left(\frac{n+1}{n}\right) + 3\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 + \dots + n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} = n^2.$$

U. DAINELLI.

71* a). Il massimo comun divisore di due numeri è 24. Facendone la ricerca col metodo delle divisioni, si trovano i numeri 3, 4, 5 e 6 come quozienti delle successive divisioni che occorre fare. Quali sono i due numeri?

b). Generalizzare il problema e il metodo per risolverlo.

G. FRATTINI.

72*. Pei centri A e B di due cerchi eguali e tangenti esternamente in F , e dalla stessa parte di AB , si conducono i raggi AC , BD paralleli fra loro; su CD come diametro si descrive un mezzo cerchio esternamente ai cerchi dati, si ottiene così una figura (*drepanoide*) formata dal suddetto mezzo cerchio e dagli archi FC , FD . Mostrare che il raggio ρ del cerchio inscritto nel drepanoide è legato al raggio r dei cerchi dati ed all'angolo $ABD = \alpha$, dalla relazione

$$\rho = \frac{2r \operatorname{sen}^2 \alpha}{4 - \operatorname{sen}^2 \alpha}.$$

G. RUSSO.

73*. Dato un triangolo, non regolare, trovare il luogo geometrico dei punti tali che una delle perpendicolari condotte da ciascuno di essi ai lati uguagli la somma o differenza delle altre due.

A. BALDASSARRE.

74*. Sia $ABCD$ un quadrilatero inscritto in una circonferenza di centro O . Sopra il lato AB , preso come corda, si descrivano le due circonferenze che hanno i loro centri sulla circonferenza O ; questi centri, che saranno i punti di mezzo dell'arco $BCDA$ e dell'arco AB , si indichino con P e con P' rispettivamente. Si operi ugual-

mente sui lati BC , CD , DA , si avranno così altre sei circonferenze, i cui centri, con notazioni analoghe alle precedenti, si indicheranno con Q e Q' , con R ed R' e con S ed S' .

Dimostrare:

1° che gli altri quattro punti in cui si tagliano le circonferenze P' , Q' , R' , S' sono i vertici di un rettangolo;

2° che gli altri quattro punti in cui si tagliano le circonferenze P , Q , R , S sono pure i vertici di un rettangolo;

3° che la congiungente dei centri di questi due rettangoli è bisecata dal punto O .

G. PESCI.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Lezioni di Algebra Elementare per GIACOMO BELLACCHI. — Parte prima: Aritmetica generale. Vol. I e II, Firenze.

Il libro è stato suggerito, come l'A. stesso dichiara nella prefazione, dal desiderio di dare pubblicità a *brevi dimostrazioni delle teoriche d'Algebra* che egli aveva trovate insegnando tal disciplina: quindi nessuna intenzione novatrice, per quanto concerne le linee fondamentali dell'Algebra, ma parecchie dimostrazioni eleganti e nuove, e sapore di originalità anche in quelle trite e notissime.

Le molte applicazioni ingegnose di teorie ovvie, alcune originali dell'A. ed altre dedotte da scrittori classici, formano a mio avviso il pregio caratteristico del libro, che porta ad epigrafe la sentenza di Newton: *In scientiis addiscendis exempla prosunt magis quam praecepta*; e gli esercizi che seguono ciascun capitolo sono quasi tutti svolti nel testo, diventando così vere appendici del capitolo stesso.

Si potrebbe, forse, desiderare maggiore omogeneità nella generalizzazione del concetto di numero, e fare qualche altro appunto di simil genere; ma discussioni d'indole didattica sarebbero qui fuori di luogo, perchè il libro è destinato a giovani che, forniti gli studi secondari, s'accingono a quelli superiori; a lettori, cioè, che certi concetti debbono avere già netti e precisi nella mente.

Ma senza tenerci più sulle generali, sarà bene che diamo una rapida scorsa al libro.

Lez. I. Simboli e definizioni.

Lez. II. Quesiti sul moto uniforme.

Lez. III. Addizione e sottrazione dei polinomi interi.

Lez. IV. Teoria dei monomi interi.

Lez. V. Numero dei divisori d'un numero intero e formula dell'indicatore.

Lez. VI. Frazioni numeriche e monomie.

Lez. VII. Prodotti dei polinomi e teoremi sui massimi e minimi.

Lez. VIII. Proprietà elementari dei numeri.

Vi si trova un metodo elegante per calcolare la somma dei numeri triangolari; e dedurre la somma dei quadrati e dei cubi dei primi n numeri naturali. Notevoli formole per ottenere dei prodotti sotto forma simile a quella dei fattori.

Fra gli esercizi è esposto il metodo di Euler per calcolare numeri amichevoli.

Lez. IX. Numeri negativi e prodotto dei polinomi ordinati.

Tra gli esercizi si notano belle identità di Euler, che permettono di trasformare un cubo in somma di cubi; il teorema di Libri per scomporre un numero razionale nella somma di quattro cubi positivi; e varie applicazioni di geometria elementare.

Lez. X. Potenze del binomio con esponenti interi e positivi.

Vi si trova un metodo elegante per calcolare i numeri figurati, definiti come somme di figurati d'ordine inferiore.

Tra gli esercizi son degni di nota quello che dà la formola di Waring; e quello che fornisce il modo di calcolare la somma delle potenze simili dei numeri interi minori di n e primi con esso.

Lez. XI. Quoziente dei polinomi ordinati.

La dimostrazione che in un sol modo il quoziente dei due polinomi interi A e B si può porre sotto la forma $Q + \frac{R}{B}$, essendo R di grado inferiore a quello di B , si fa dipendere del principio che due polinomi di grado diverso non possono essere identicamente eguali, il qual principio, invocato altre volte in seguito, non parmi evidente.

La divisibilità per $x - a$ è dimostrata al solito modo.

In questo capitolo è esposto il modo di formare il quoziente d'un polinomio diviso per $x - a$; ed è fatta la teoria delle radici commensurabili.

Tra gli esercizi son determinati i criteri di divisibilità per $b \pm 1$, nel sistema di numerazione di base b .

Lez. XII. Forme dei divisori di primo e secondo grado dei polinomi interi.

Questa lezione comincia col calcolo dei numeri complessi, quindi presenta uno studio completo del polinomio quadratico; finisce con alcuni bei teoremi di massimo e minimo, tra' quali quello dell'alveare.

Tra gli esercizi trovasi un'ingegnosa applicazione dei numeri complessi a risolvere in numeri interi l'equazione $x^2 + y^2 = z^m$, e qualche altra equazione analoga.

Lez. XIII e XIV. Dei polinomi interi di terzo e quarto grado.

Queste lezioni sono condotte nei particolari con procedimenti forse più speciosi che semplici; il che va attribuito al fatto che l'A. non ha dimostrato

ancora certi teoremi generali sull'equazioni, come a mo' d'esempio la dipendenza tra radici e coefficienti, e li verifica pel caso delle equazioni cubiche e biquadratiche.

Il teorema che un polinomio del 3° o del 4° grado si può scomporre in prodotto di fattori lineari in una sola maniera, è dimostrato in guisa che presta il fianco alla censura; infatti la dimostrazione data non basterebbe a provare assurda l'identità $(x - x_1)^2 (x - x_2) = (x - x_1) (x - x_2)^2$ per $x_1 > x_2$.

L'equazione cubica è risolta col metodo del Tartaglia. Quella biquadratica col metodo del Ferrari, e poi son trovate le relazioni tra le radici di quella e le radici della risolvente del Ferrari, del Lagrange e di Euler.

La discussione è ampia e completa, e spesso le condizioni sono espresse per mezzo dei noti invarianti delle forme binarie di 3° e 4° grado.

Lez. XV. Il metodo delle divisioni successive per la ricerca della massima comune misura.

Oltre la teoria generale del massimo comun divisore e del minimo comune multiplo di più numeri, son riferite delle formole poco note, come quella del Polignac tra quattro interi. È fatta la teoria delle frazioni continue, con le sue proprietà più notevoli, ed applicazione al teorema d'Euler: « Se un numero intero divide la somma di due quadrati interi, è pur esso la somma di due quadrati interi ». Sono studiati alcuni casi d'incommensurabilità di segmenti.

Tra gli esercizi: si trova la serie Fibonacci, di cui son dimostrate proprietà interessanti, ed è calcolato il termine n^{esimo} (e quindi la somma dei primi n termini). Quest'ultimo problema è presentato come caso particolare d'un altro più generale, da cui deducesi pure la ridotta n^{esima} della frazione continua

$$a_1 + \frac{r}{2a_1 + \frac{r}{2a_1 + \dots}} \text{ a cui dà origine l'irrazionale } \sqrt{a_1^2 + r}; \text{ e si dimo-}$$

stra che la $(2^n - 1)^{\text{esima}}$ ridotta coincide con la m^{esima} approssimazione del Fibonacci (il Fibonacci per il valore della radice quadrata del numero $N = a_1^2 + r$ diè le seguenti approssimazioni:

$$a_1, a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{N}{a_1} \right), a_3 = \frac{1}{2} \left(a_2 + \frac{N}{a_2} \right), \dots, a_m = \frac{1}{2} \left(a_{m-1} + \frac{N}{a_{m-1}} \right).$$

Sonvi altri interessanti esercizi.

C'è da osservare che l'eguaglianza

$$\frac{e + dx}{1 - gx - hx^2} = u_1 + u_2 x + u_3 x^2 + \dots$$

non può avere un significato ben chiaro pel lettore, che di serie convergenti nei suoi studi precedenti non ha sentito parlare, e qui non trova nemmeno la definizione.

Lez. XVI. Il massimo comun divisore dei polinomi.

Negli esercizi si trovano le condizioni perchè due quadriche o due cubiche abbiano una radice comune, e quindi si calcolano le eliminate tra due equazioni del 2° e del 3° grado. Sistema armonico di punti e coppie di punti in involuzione su una retta.

Lez. XVII. Derivate delle funzioni algebrico-razionali.

Si rifà la teoria dei numeri figurati in maniera diversa da quella tenuta innanzi. Si determina quindi resto e quoziente della divisione di $u_1 x^n + u_2 a x^{n-1} + u_3 a^2 x^{n-2} + \dots$ per $x - a$, nell'ipotesi che sieno $u_1, u_2, \dots$ numeri figurati, e si ottiene di nuovo la formola del binomio; e quindi quella di Taylor; e si definisce derivata di $f(x)$ il coefficiente di h nello sviluppo di $f(x+h)$. Si applica la teoria alla ricerca delle radici multiple d'una equazione razionale e a determinare il grado della eliminata fra due equazioni (dimostrazione del Trudi).

Tra gli esercizi. Condizione perchè una cubica abbia radice doppia, o una biquadratica radice doppia o tripla. Due radici di una cubica si esprimono con funzioni quadriche della terza radice, o con frazioni a termini lineari rispetto alla terza radice.

Lez. XVIII. Operazioni sulle quantità irrazionali.

Chiude il capitolo un cenno storico sull'irrazionali; si riferisce il problema di costruire gl'irrazionali di 2° grado per mezzo di rette e cerchi, e l'impossibilità di costruire con lo stesso mezzo quelli del 3°, e son citati i metodi proposti per la duplicazione del cubo con l'inserzione di due medi geometrici, con le coniche o con altre curve celebri.

Un cenno sulla geometria del compasso.

Tra gli esercizi è notevole un riassunto della goniometria presso i greci; la corda dell'arco somma o differenza espresso per mezzo delle corde degli archi semplici (teorema di Tolomeo); applicazioni al calcolo dei lati e delle diagonali dei poligoni regolari e ordinari e dell'*ettudecagono*; metodo di Tolomeo per calcolare la corda di 1° grado e poterne quindi dedurre una tavola di valori approssimati delle corde. Norma d'una funzione somma di radicali.

Lez. XIX. Estrazione della radice m^{esima} dai polinomi.

Forma dello sviluppo di $(1+x)^m$ per m frazionario positivo o negativo.

Tra gli esercizi: utili formole per la estrazione di radice dai numeri. Condizione perchè si possa trasformare l'espressione

$$\sqrt[m]{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \text{ nell'altra } \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2 \sqrt[m]{u}}.$$

Lez. XX. Le progressioni.

Tra gli esercizi è calcolato la somma dei numeri figurati inversi; e di altre serie.

Lez. XXI. I logaritmi.

È data la dimostrazione che l'interpolazione per parti proporzionali pei logaritmi dei numeri superiori a 10000 non porta errore sulla 7ª cifra della mantissa.

Lez. XXII. Interessi composti ed annualità.

Lez. XXIII. Teoria dei limiti.

Oltre alcune applicazioni, che servono pei capitoli seguenti, è da notare una elegante dimostrazione d'eguaglianza $12 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots$

Il metodo di Archimede pel calcolo di π è esposto coi suoi particolari.

Riferiti alcuni teoremi fondamentali del Cavalieri, se ne fa un'applicazione alla quadratura del segmento parabolico.

Tra gli esercizi, la somma di alcune serie trigonometriche e la loro applicazione al bel teorema del Viviani, per calcolare superficie e solidi ottenuti dall'intersezione di due cilindri eguali e tangenti lungo una generatrice con una sfera ad essi tangente e che abbia il centro sulla generatrice di contatto.

È da osservare che in questo capitolo e nei seguenti da una disuguaglianza $f(x) < F(x)$ si deduce $\lim. f(x) < F(x)$ anzichè $\lim. f(x) \leq \lim. F(x)$.

Lez. XXIV. Le funzioni trascendenti.

Serie esponenziale. Seno e coseno iperbolici definiti come somme dei termini di posto dispari o pari nello sviluppo di e^x . Coseno e seno circolari definiti come parte reale e coefficiente dell'immaginaria nello sviluppo di e^{ix} ; è dimostrata ingegnosamente l'identità delle nuove definizioni con quelle geometriche di seno e coseno.

Serie logaritmica. Sviluppo di $\arctang x$, $\arcsen x$.

Tra gli esercizi: un bel teorema che permette di trasformare una somma in frazione continua; formola di Brounker. Un interessante studio sulle frazioni continue che si presentano sotto una speciale forma; dal quale è dedotta la formola di Wallis che dà lo sviluppo di π in prodotto d'infiniti fattori.

Lez. XXV. Quesiti sul moto vario.

Sono dimostrate le formole del moto uniformemente vario; quella per la caduta d'una grave entro un fluido che opponga resistenza proporzionale al quadrato della velocità; la formola del pendolo.

Nella rapida recensione che ho fatta, non pretendo di aver segnalato tutto ciò che c'è di buono nel libro, forse anche avrò taciuto il meglio, ma spero di aver detto quanto basti per invogliare alla lettura di esso.

Termino facendo voti che il chiaro A. dia presto alla luce la seconda parte dell'opera.

F. VIAGGI.

Publicazioni ricevute dalla Direzione del Periodico

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm: n. 1, 1890.

Journal de Mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. G. DE LONGCHAMPS, professeur de Mathématiques

- spéciales au Lycée Charlemagne, L. LÉVY, agrégé des sciences mathématiques, directeur des études à l'École préparatoire de Saint-Barbe. 3^e Série, Quatorzième année. N. 4. Avril, 1890. Paris, librairie Ch. Delagrave.
- Journal de Mathématiques élémentaires* publié par H. VUIBERT. 14^e année. N. 13, 14, 15, 16. Paris, M. Nony et C., 17 rue des Écoles, 1890.
- Mathesis*, recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. MANSION, professeur à l'Université de Gand, et J. NEUBERG, professeur à l'Université de Liège. Tome dixième. Avril, Mai, 1890. Paris, Gauthiers-Villars & fils; Gand Ad. Hoste, Éditeur.
- Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*. Tomo IV. Fasc. III e IV, Maggio-Giugno e Luglio-Agosto, 1890.
- Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche* (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2^a, Vol. IV, Fasc. 3^e e 4^e, Marzo, Aprile 1890.
- Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*. Ein Organ für Methodik, Bildungsgehalt und Organisation der exakten Unterrichtsfächer an Gymnasien, Realschulen, Lehrerseminarien und gehobenen Bürgerschulen, herausgegeben von J. C. V. HOFFMANN. XXI Jahrgang. 2, 3 Heft. Leipzig, B. G. Teubner, 1890.
- BERTINI (E.) — Sul numero dei punti di diramazione di una singolarità qualunque di una curva piana algebrica (*Rendiconti R. Istit. Lomb.*, 1890).
- BIGIARI (C.) — Sulle equazioni differenziali lineari a coefficienti doppiamente periodici (*Rend. R. Acc. Lincei*, 1890).
- CHISTONI (C.) — Sulla determinazione del meridiano astronomico col magnetometro unifilare di Kew (*Memorie della Società degli Spettroscopisti italiani*, 1890).
- DIEKMANN (J.) — Anwendung der Determinanten und Elemente der neuern Algebra auf dem Gebiete der niedern Mathematik. Leipzig, B. G. Teubner, 1889.
- FRATTINI (G.) Aritmetica pratica ad uso delle Scuole elementari del Regno, approvata da molti consigli scolastici. Parte I, 4^a ediz. prezzo cent. 40. Parte IV, 2^a ediz. prezzo cent. 75. Ditta G. B. Paravia e C., 1890.
- GARBIERI (G.) — La matematica nello sviluppo delle scienze. Discorso letto nella R. Università di Genova inaugurando le lezioni di Algebra complementare e di Geometria analitica. Genova, 1890.
- MISTROT (P.) — Contabilità popolare per agricoltori e commercianti con 5 grandi tavole dimostrative. Ditta G. B. Paravia e C., 1889. Prezzo: lire 1,50.
- PADOVA (E.) — Il potenziale delle forze elastiche di mezzi isotropi. — Del moto di un corpo non soggetto ad azioni acceleratrici. — Moto di un cono circolare pesante che rotola sopra un piano inclinato (*Atti R. Istit. veneto*, 1890).
- PALATINI (F.) — Sopra una configurazione determinata dal punto doppio e da sette punti semplici di una cubica piana razionale. Palini, tip. G. Lopresti, 1890.
- PASCAL (E.) — Sulla teoria delle funzioni σ Abelianie pari a tre argomenti. Memoria IV. (*Annali di mat.*, 1890).
- RICCARDI (P.) — Concetto generale di una biblioteca matematica italiana del secolo XIX. (*Rend. R. Acc. delle Scienze dell'Istit. di Bologna*, 1890).
- VIGARIÉ (É.) — Esquisse historique sur la marche du développement de la géométrie du triangle (Association française pour l'avancement des sciences. Congrès de Paris, 1889).

DELLE PENSIONI VITALIZIE

NEL CASO CHE LE SOMME VERSATE DAGLI ASSICURATI

siano da restituirsi, senza interessi, agli eredi.

I. Un individuo dell'età di anni n , per ottenere una determinata pensione annua vitalizia P decorribile dall'età di anni $n + i$, versa alla cassa di un istituto un contributo annuo costante c_n colla riserva che, al momento della sua morte, le somme da lui versate vengano, senza gl'interessi, interamente restituite ai suoi eredi, qualora la morte accada prima che egli abbia cominciato a percepire la pensione.

È una forma d'assicurazione in uso presso diverse società di mutuo soccorso (*) e quindi parmi utile di dare alcune indicazioni, affinchè si possa in pratica conoscere qual contributo matematicamente corrisponda ad una determinata pensione. Per un individuo dell'età di anni n , sia r_n il valore attuale di un'annualità vitalizia immediata di una lira annua; e $w_{n, n+i}$ il valore attuale di un'annualità vitalizia pure di una lira, differita però all'età di anni $n + i$.

Siccome il contributo altro non è che un'annualità vitalizia immediata, il valore attuale di tutte le contribuzioni annue per l'individuo di anni n sarà $c_n r_n$; mentre, potendosi la pensione considerare un'annualità vitalizia differita, il valore attuale delle pensioni promesse, all'individuo di n anni, sarà $P w_{n, n+i}$.

Suppongo per semplicità che, qualora l'individuo assicurato non giunga a percepire la pensione, la restituzione delle somme versate abbia luogo alla fine dell'anno in cui avviene la morte.

Se il contributo fosse di una lira annua, gli eredi avrebbero diritto alla restituzione di una lira se la morte avvenisse nel primo anno, di due lire se nel secondo, di tre se nel terzo,, di i lire se nel i^{esimo} .

Sia, nell'ipotesi del contributo di una lira annua, $r_{n, n+i}$ il valore attuale del capitale da restituirsi agli eredi quando l'individuo assicu-

(*) Fra queste cito la Società nazionale di mutuo soccorso degli Impiegati con sede in Milano.

rato muoia in una delle i età di anni $n, n+1, n+2, \dots n+i-1$. Nel nostro caso sarà $c_n r_{n, n+i}$ il valore attuale delle somme da restituirsi agli eredi.

Facendo astrazione dalle spese amministrative dell'istituto e supponendo che sia questo il primo anno in cui l'individuo comincia a contribuire e quindi che egli non si sia formato alcun fondo di riserva, affinchè il contributo c_n corrisponda matematicamente agli impegni dell'istituto, si dovrà avere:

$$c_n v_n = c_n r_{n, n+i} + P w_{n, n+i}$$

da cui

$$c_n = \frac{P w_{n, n+i}}{v_n - r_{n, n+i}}.$$

Pei valori r_n e $w_{n, n+i}$ delle annualità vitalizie, immediata e differita, sono note le formule e sono pure stati calcolati i risultati numerici in base a determinate ipotesi relative alla mortalità e al saggio d'interesse (*).

Se, per le condizioni del contratto, l'individuo assicurato non fosse più, dal momento della decorrenza della pensione, tenuto a contribuire, in luogo dell'annualità vitalizia immediata r_n si dovrebbe porre l'annualità vitalizia immediata e *temporanea* (dall'età n all'età $n+i-1$), per la quale è pure nota la formula e sono stati calcolati i valori numerici.

Quindi io mi limito a trovare la formula pel valore $r_{n, n+i}$.

II. Si osservi che, come si è detto sopra, per un individuo il quale versi in ogni anno una lira l'assicurare la restituzione (in caso di morte) del capitale accumulato, senza interessi, equivale ad assicurare agli eredi una lira se la morte avviene nel primo anno, due lire se avviene nel secondo, tre se nel terzo, i lire se nel i^{esimo} .

Quindi il valore attuale di tale assicurazione si può considerare eguale alla somma dei valori attuali di tante assicurazioni temporanee, ciascuna della durata di un anno, e corrispondenti al n^{esimo} , al $(n+1)^{\text{esimo}}$ al $(n+2)^{\text{esimo}}$,, al $(n+i-1)^{\text{esimo}}$ anno di età dell'individuo assicurato e rispettivamente ai capitali 1; 2; 3;, i .

(*) Veda il mio volume: *Teoria matematica della previdenza*. (Parma - Battel, 1889).

Siano $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \dots, s_{n+i-1}, s_{n+i}$ i numeri dei superstiti della tavola di sopravvivenza (*) corrispondenti alle età $n, n+1, n+2, \dots, n+i-1, n+i$. Se i fatti corrisponderanno alla legge della tavola prescelta, i morti nel primo anno saranno $s_n - s_{n+1}$, nel secondo $s_{n+1} - s_{n+2}, \dots$, nel i^{esimo} $s_{n+i-1} - s_{n+i}$.

Se s_n individui della stessa età n volessero assicurare ciascuno una lira, pagabile agli eredi nel solo caso che la morte accadesse nel primo anno, l'istituto d'assicurazione si esporrebbe al pagamento di lire $s_n - s_{n+1}$ alla fine d'anno. Il valore attuale di questa somma, essendo t il saggio d'interesse (l'interesse di una lira in un anno), è $\frac{s_n - s_{n+1}}{1+t} = h (s_n - s_{n+1})$, in cui $h = \frac{1}{1+t}$. Se tale è il valore attuale di tutte le somme pagabili agli eredi dei defunti fra gli s_n individui assicurati, il valore di tale assicurazione, per un solo individuo di n anni, sarà $h \frac{s_n - s_{n+1}}{s_n}$.

Qualora gli stessi s_n individui volessero assicurare ciascuno ai loro eredi una lira annua, da pagarsi nel solo caso che la morte avvenisse nel secondo anno dell'assicurazione, l'istituto s'impegnerebbe a pagare alla fine del secondo anno lire $s_{n+1} - s_{n+2}$, le quali ridotte al loro valore attuale danno $\frac{s_{n+1} - s_{n+2}}{(1+t)^2} = h^2 (s_{n+1} - s_{n+2})$. Il valore di tale assicurazione per un solo individuo è quindi $h^2 \frac{s_{n+1} - s_{n+2}}{s_n}$.

In generale $h^m \frac{s_{n+m-1} - s_{n+m}}{s_n}$ è, per un solo individuo dell'età n , il valore dell'assicurazione temporanea di una lira, da pagarsi agli eredi nel solo caso che la morte accada nel m^{esimo} anno dell'assicurazione.

Ne consegue che il valore attuale $r_{n,n+i}$ è dato dalla formula

$$[1] \quad r_{n,n+i} = h \frac{s_n - s_{n+1}}{s_n} + 2 h^2 \frac{s_{n+1} - s_{n+2}}{s_n} + 3 h^3 \frac{s_{n+2} - s_{n+3}}{s_n} + \dots \\ \dots + i h^i \frac{s_{n+i-1} - s_{n+i}}{s_n}.$$

(*) Propriamente parlando devonsi distinguere la tavola di mortalità da quella di sopravvivenza. Di un certo numero di individui, che si suppongono nati nel medesimo istante, la tavola di sopravvivenza fornisce direttamente il numero probabile dei superstiti dopo uno, due, tre ... m ...

anni; quella di mortalità fornisce i quozienti di mortalità, ossia le espressioni $\frac{s_m - s_{m+1}}{s_m}$ corrispondenti a tutti i valori interi di m .

Ricavando dalla tavola di sopravvivenza i numeri $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \dots, s_{n+i-1}, s_{n+i}$, e calcolando, quando siasi scelto il saggio d'interesse, le potenze di $h = \frac{1}{1+t}$ (*), si ottiene mediante la formula precedente il valore numerico di $r_{n,n+i}$.

Se i numeri dei superstiti nelle diverse età formassero, con sufficiente approssimazione, per il periodo considerato fra l'età n e l'età $n+i$, una progressione aritmetica, ossia se, entro i limiti predetti, la curva di sopravvivenza divenisse approssimativamente rettilinea, si avrebbe

$$s_n - s_{n+1} = s_{n+1} - s_{n+2} = s_{n+2} - s_{n+3} = \dots = s_{n+i-1} - s_{n+i}.$$

Ponendo

$$\delta = h \frac{s_n - s_{n+1}}{s_n} = h \frac{s_{n+1} - s_{n+2}}{s_{n+1}} = \dots = h \frac{s_{n+i-1} - s_{n+i}}{s_{n+i-1}}$$

la formula [1] si trasforma nella seguente:

$$r_{n,n+i} = \delta (1 + 2h + 3h^2 + 4h^3 + \dots + ih^{i-1}).$$

L'espressione compresa tra parentesi nel secondo membro equivale alla somma delle espressioni seguenti:

$$\begin{array}{ll} 1 + h + h^2 + \dots + h^{i-2} + h^{i-1} & \text{ossia} \quad \frac{1 - h^i}{1 - h} \\ h + h^2 + \dots + h^{i-2} + h^{i-1} & \gg \quad \frac{h - h^i}{1 - h} \\ \dots & \gg \quad \dots \\ h^{i-2} + h^{i-1} & \gg \quad \frac{h^{i-2} - h^i}{1 - h} \\ h^{i-1} & \gg \quad \frac{h^{i-1} - h^i}{1 - h} \end{array}$$

Quindi

$$\begin{aligned} 1 + 2h + 3h^2 + 4h^3 + \dots + ih^{i-1} &= \\ \frac{1 + h + h^2 + h^3 + \dots + h^{i-1} - ih^i}{1 - h} &= \\ \frac{ih^{i+1} - (i+1)h^i + 1}{(1-h)^2} &(**) \end{aligned}$$

(*) Nel mio volume, citato precedentemente in nota, ho calcolato le potenze di $h = \frac{1}{1+t}$ fino all'ottantacinquesima, per dieci valori differenti di t da 0,02 a 0,05.

(**) Si poteva giungere allo stesso risultato più brevemente giovandosi di alcune nozioni elementari sul calcolo delle derivate. Si ha infatti:

Sostituendo avremo :

$$r_{n,n+i} = \delta \frac{i h^{i+1} - (i+1) h^i + 1}{(1-h)^2}.$$

III Abbiamo trovato (formula [1]):

$$r_{n,n+i} = \sum_1^i m h^m \frac{s_{n+m-1} - s_{n+m}}{s_n}.$$

Se l'assicurazione fosse fatta a capitale interamente e incondizionatamente riservato; vale a dire, se il capitale versato dovesse interamente (senza interessi) restituirsi qualunque fosse l'epoca della morte, il valore analogo al precedente si otterrebbe estendendo la somma $\sum$ del secondo membro fino che $n+m-1$ divenisse eguale al numero d'anni limite (secondo la tavola scelta) della durata della vita umana.

Se però il contributo cessasse dal momento della decorrenza della pensione, il valore attuale del capitale (incondizionatamente riservato), da restituirsi in caso di morte, dovrebbe considerarsi come il valore di un'assicurazione limitata al periodo anteriore all'età $n+i$ (nel quale il capitale si accumula e aumenta progressivamente) come l'assicurazione precedente, più il valore di una seconda assicurazione differita all'età $n+i$ per tutto il capitale accumulato, che resta costante in questo secondo periodo.

Supponendo conosciute le formule relative alle assicurazioni immediate e differite di capitali determinati scadibili alla morte, posso considerare completamente risolto il problema che io mi ero proposto di studiare.

GIUSEPPE GARDENGHI.

$$\begin{aligned} 1 + 2h + 3h^2 + \dots + i h^{i-1} &= \frac{d}{dh} (1 + h + h^2 + h^3 + \dots + h^i) \\ &= \frac{d}{dh} \frac{1 - h^{i+1}}{1 - h} = \frac{-(i+1) h^i (1 - h) + 1 - h^{i+1}}{(1 - h)^2} \\ &= \frac{i h^{i+1} - (i+1) h^i + 1}{(1 - h)^2}. \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE DELLA PERIODICITÀ NELLA ESPRESSIONE IN SERIE INFINITE DELLE GRANDEZZE RAZIONALI

1. Abbiassi una grandezza x razionale od irrazionale, per semplicità, minore di 1.

Sia a un numero intero e positivo fissato: prendansi a considerare le grandezze $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, ecc. e si determini quante grandezze $\frac{1}{a}$ contiene x (al massimo): sieno c_1 ; così si determini quante $\frac{1}{a^2}$ contiene la parte rimanente di x e sieno c_2 , e così di seguito; la operazione avrà un termine o no; cioè con quel procedimento si verrà o no ad esaurire tutta la x ; in altri termini x sarà esprimibile in questa forma: $x = c_1 \frac{1}{a} + c_2 \frac{1}{a^2} + c_3 \frac{1}{a^3} + \text{ecc.}$ ($0 \leq c_i < a$), e la serie sarà finita o infinita.

Voglio far vedere come discenda da un noto teorema sui Numeri (*) che, *quando x è razionale, la suddetta operazione, se non finisce, deve necessariamente diventare periodica* e quindi che *la serie, se è infinita, deve essere periodica*.

2. Premetto le due seguenti osservazioni. Se si arresta la operazione alla considerazione delle grandezze $\frac{1}{a^n}$ si dice che si è calcolato x con la approssimazione di $\frac{1}{a^n}$ ovvero a meno di $\frac{1}{a^n}$ e il valore approssimato sarebbe $c_1 \frac{1}{a} + c_2 \frac{1}{a^2} + c_3 \frac{1}{a^3} + \dots + c_n \frac{1}{a^n}$, il quale è un certo numero di $\frac{1}{a^n}$ e precisamente il massimo numero delle $\frac{1}{a^n}$ contenute in x ; la parte rimanente di x sarebbe l'*errore* relativo a quella approssimazione.

(*) Teorema di Fermat esteso da Eulero. — V. BALTZER, *Aritmetica generale*, § 13 n. 21 e BERTRAND, *Trattato di Algebra elementare*, trad. da Betti, Nota V. Teoremi 1. e 2.

Osservo anche che dovendosi calcolare $\frac{x}{a}, \frac{x}{a^2}, \dots, \frac{x}{a^m}, \dots$ si avrebbero gli identici numeri c che si otterrebbero calcolando x e precisamente i numeri c che si otterrebbero per la $(m+1)^a$ $(m+2)^a$ ecc. approssimazione di $\frac{x}{a^m}$ sarebbero rispettivamente gli stessi di quelli che si otterrebbero per la $1^a, 2^a$, ecc. approssimazione di x . Infatti per le approssimazioni $(m+1)^a$ $(m+2)^a$ ecc. di $\frac{x}{a^m}$ si devono fare fra $\frac{x}{a^m}$ e $\frac{1}{a^{m+1}} \frac{1}{a^{m+2}}$ ecc. le stesse operazioni che si fanno fra x e $\frac{1}{a} \frac{1}{a^2}$ ecc. per le approssimazioni $1^a, 2^a$, ecc.: ora i rapporti di quantità fra queste due categorie di grandezze

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{x}{a^m}, & \frac{1}{a^{m+1}} & \frac{1}{a^{m+2}} \text{ ecc.} \\ x, & \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} \text{ ecc.} \end{array} \right\}$$

sono identici.

3. Premesso questo, sia x adunque una grandezza razionale (< 1): sarà allora uguale ad una espressione $\frac{r}{s}$, ove r, s sono numeri interi. Se $s = a$ ovvero è composto di fattori primi che sono *tutti* fattori primi pure di a la operazione da eseguirsi su x ha termine (cioè la serie è finita) e reciprocamente.

Gli altri casi che possono presentarsi sono *unicamente* i seguenti:

1). s è composto di fattori primi tutti diversi da quelli di a , cioè è primo con a .

2). s è composto di fattori primi parte diversi, parte uguali a quelli di a .

Considero il primo caso; dico che si può certamente arrivare con la operazione a un punto tale, cioè arrivare ad una approssimazione tale, che l'errore relativo sia una grandezza della specie $\frac{x}{a^m}$, ed anzi più precisamente che l'approssimazione per la quale si verifica questo fatto sarà a meno di $\frac{1}{a^m}$: dimostrato questo sic-

come si sa che calcolando una grandezza $\frac{x}{a^m}$ si trovano per le approssimazioni $(m+1)^a (m+2)^a$ ecc. gli stessi numeri che per le approssimazioni $1^a, 2^a$, ecc. di x e le approssimazioni che bisognerà determinare di $\frac{x}{a^m}$ per avere le successive di x sono appunto le $(m+1)^a (m+2)^a$ ecc., così si vede come i risultati della operazione si ripeteranno tali e quali e cioè la serie sarà periodica.

Dimostro adunque che esiste una approssimazione a meno di $\frac{1}{a^m}$ tale che l'errore relativo è $\frac{x}{a^m}$. Perciò basta applicare il succitato teorema, che è il seguente: « avendosi due numeri p, q primi fra loro, esiste una potenza (intera) q^φ di q tale che $q^\varphi - 1$ è un multiplo di p ; φ è poi il numero degli interi inferiori a p e primi con esso ».

Essendo i due numeri a, s primi fra loro esisterà una certa potenza d'esponente $\varphi(s)$ (intero, positivo) di a tale che $a^{\varphi(s)} - 1$ sarà un multiplo di s e quindi

$$\frac{r}{s} \left\{ a^{\varphi(s)} - 1 \right\} = x \left\{ a^{\varphi(s)} - 1 \right\}$$

sarà un numero intero I ; onde $\frac{I}{a^{\varphi(s)}} = x - \frac{x}{a^{\varphi(s)}}$; ora si vede subito che la grandezza $\frac{I}{a^{\varphi(s)}}$ è effettivamente una approssimazione di x : infatti è minore di x ed aggiungendovi $\frac{1}{a^{\varphi(s)}}$ si ha una grandezza maggiore di x , perchè $\frac{x}{a^{\varphi(s)}}$ è minore di $\frac{1}{a^{\varphi(s)}}$; I è quindi il massimo numero di $\frac{1}{a^{\varphi(s)}}$ contenute in x e $\frac{I}{a^{\varphi(s)}}$ è la approssimazione di x a meno di $\frac{1}{a^{\varphi(s)}}$. Dalla medesima precedente uguaglianza si ricava poi anche che l'errore relativo a tale approssimazione è precisamente $\frac{x}{a^{\varphi(s)}}$.

Giunti quindi con la più volte citata operazione a tale approssimazione la operazione stessa riproduce i medesimi risultati e la serie è necessariamente periodica.

Il secondo caso poi può essere immediatamente ricondotto al primo. Se s contiene fattori primi parte uguali, parte diversi da quelli di a , sia σ il prodotto di tutti i suoi fattori primi che sono uguali a fattori primi di a , e s' sia il prodotto dei rimanenti, sicchè, $\sigma s' = s$. La minima potenza di a che contiene σ sia a^k e sia $\sigma \tau = a^k$; allora

$$a^k x = a^k \frac{r}{s} = \sigma \tau \frac{r}{s} = \tau \frac{r}{s'}$$

e quindi $a^k x = \frac{\tau r}{s'}$ ed eseguendo la divisione $a^k x = \frac{\tau r}{s'} = i + \frac{t}{s'}$ ove i sarà un intero e potrà anche essere 0, e $\frac{t}{s'}$ sarà una frazione, il cui denominatore è un numero primo con a e quindi $x = \frac{i}{a^k} + \frac{t}{s'} \frac{1}{a^k}$; ora siccome $x < 1$, $a^k x < a^k$, quindi $i < a^k$ e perciò i sarà della forma $i_1 a^{k-1} + i_2 a^{k-2} + \dots + i_{k-1} a + i_k$, ove $0 \leq i_j < a$ ($j = 1, 2, \dots, k$), onde

$$x = \frac{i_1}{a} + \frac{i_2}{a^2} + \dots + \frac{i_{k-1}}{a^{k-1}} + \frac{i_k}{a^k} + \frac{t}{s'} \frac{1}{a^k};$$

la grandezza $\frac{t}{s'}$ dà luogo a sua volta a una serie periodica e quindi anche in questo caso x è esprimibile mediante la solita operazione in una serie infinita periodica, previa una certa serie finita.

4. Si può anche osservare che, ammessa come nota tale proprietà e cioè che una grandezza razionale si può esprimere mediante una serie periodica della suddetta forma (al che si può arrivare facendo uso del metodo ordinariamente seguito nei trattati di Aritmetica elementare) se ne può dedurre come conseguenza che se sia p un numero intero primo con un certo altro intero q esiste una potenza q^{esima} di q per la quale q^{q-1} è multiplo di p . Si formi infatti la grandezza $\frac{1}{p}$, la quale, essendo razionale, si potrà esprimere in una serie della forma

$$c_1 \frac{1}{q} + c_2 \frac{1}{q^2} + c_3 \frac{1}{q^3} + \dots + c_g \frac{1}{q^g} + c_1 \frac{1}{q^{g+1}} + \\ c_2 \frac{1}{q^{g+2}} + \dots + c_g \frac{1}{q^{2g}} + \text{ecc.} \quad (0 \leq c_i < q)$$

ove ogni g termini i numeri c si ripeteranno identicamente. Ora osservo che tale serie è una progressione geometrica avente per primo termine $\frac{c_1 q^{g-1} + c_2 q^{g-2} + \dots + c_g}{q^g}$ e per ragione $\frac{1}{q^g}$ e quindi la sua somma è $\frac{c_1 q^{g-1} + c_2 q^{g-2} + \dots + c_g}{q^g - 1}$, vale a dire $\frac{1}{p}$ è uguale a questa espressione; ma le quantità che vi figurano come numeratore e denominatore sono due numeri interi, onde si vede che il numero p moltiplicato per un opportuno numero intero dà $q^g - 1$, o in altri termini $q^g - 1$ è un multiplo di p .

Non è forse inutile il notare la forma

$$(q - 1) q^{g-1} + (q - 1) q^{g-2} + \dots + (q - 1) q + (q - 1)$$

sotto cui si può mettere il numero $q^g - 1$.

D.^r ITALO AMALDI.

TEOREMI SUI TRIANGOLI ISOBARICENTRICI

In una nota, inserita nel 1° fascicolo del II anno di questo Periodico, intitolata « Di alcune proprietà del triangolo », il Prof. Besso mostrava l'esistenza di certi triangoli isobaricentrici con un triangolo dato. I Professori Pesci e Panizza continuarono, in lavori pubblicati nello stesso Periodico, lo studio del Prof. Besso, estendendo la serie dei triangoli isobaricentrici con un triangolo dato. La presente nota è un'aggiunta ai lavori fatti dai detti professori.

Dato un triangolo ABC , si diranno M, N, P i punti medi dei lati BC, CA, AB rispettivamente ed O il suo baricentro. Sieno A', B' due punti qualunque del piano del triangolo, si conduca $A'O$, che si prolungherà dalla parte di O fino in M' in modo che sia $A'O = 2 OM'$, e si unisca B' con M' e la retta $B'M'$ si prolunghi dalla parte di M' fino in C' , in modo che sia $M'C' = B'M'$; sarà

$A' B' C'$ un triangolo isobaricentrico con il triangolo dato. Dati A' , B' , il punto C' resta determinato in modo unico. Dunque:

Dato un triangolo, un triangolo isobaricentrico ad esso è determinato in modo unico quando si assegnino ad arbitrio due suoi vertici.

Un triangolo isobaricentrico con un triangolo dato è pure determinato da un vertice A' e dalla direzione dei due lati $A' B'$, $A' C'$ che escono da A' . Basterà condurre per M' una retta che sia terminata ai lati dell'angolo $B' A' C'$ e sia bisecata in M' .

I punti B' , C' sono simmetrici rispetto al punto M' . Dunque:

Se dei vertici d'un triangolo isobaricentrico con un triangolo dato uno rimane fisso e un altro descrive una linea, l'altro descrive una linea simmetrica rispetto a un punto determinato dal vertice fisso.

Se il triangolo $A' B' C'$ deve essere simile al triangolo dato, basterà assegnare il solo vertice A' . Infatti, determinato M' , si conduca per M' una retta che faccia con $A' M'$ angoli eguali (in grandezza e senso) a quelli che $B C$ forma con $A M$, e per A' si conducano due rette che formino con $A' M'$ i medesimi angoli che $A B$, $A C$ formano con $A M$; si sarà così costruito un triangolo simile al dato e isobaricentrico con esso.

Il vertice A' si scelga sopra il lato $B C$, e il vertice B' sopra il lato $A C$. Se A' rimane fisso e B' descrive la retta $A C$, il vertice C' descriverà la simmetrica di $A C$ rispetto al punto M' (Tav. I, fig. 1). Questa retta simmetrica tagli $B A$ nel punto C' , sarà $A' B' C'$ un triangolo isobaricentrico con il triangolo dato e iscritto in esso. E si dimostra che i vertici di questo triangolo dividono nello stesso rapporto i lati del triangolo fondamentale (Besso, l. c.).

Se $A' B' C'$ oltre di essere iscritto deve essere simile al triangolo dato, il primo triangolo risulta perfettamente determinato. Calcolando i lati del triangolo $A' B' C'$ in funzione dei lati del triangolo dato, e cercando la condizione perchè esso risulti simile al triangolo fondamentale, si trova $\frac{B A'}{A' C} = 1$ per rapporto in cui A' deve dividere $B C$.

Dunque:

Fra gli infiniti triangoli iscritti in un triangolo dato e isobaricentrici con esso, ve ne è un solo simile al dato ed ha per vertici i punti di mezzo dei lati del triangolo stesso.

La costruzione di $A' B' C'$ nell'ultimo caso mostra che se A' va all'infinito sopra BC , B' e C' andranno pure all'infinito sopra i lati AC , AB rispettivamente.

Sieno A', C' vertici di un triangolo isobaricentrico iscritto. Si ha:

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{AC'}{C'B}, \quad \text{ovvero:} \quad \frac{BC}{A'C} - \frac{A'C}{A'C} = \frac{AB}{C'B} - \frac{C'B}{C'B}$$

da cui

$$\frac{A'C}{C'B} = \frac{BC}{AB}.$$

Similmente: se $A'', A''', \dots, C'', C''', \dots$ sono vertici di altri triangoli analoghi, si avrà:

$$\frac{A'C}{C'B} = \frac{A''C}{C''B} = \frac{A'''C}{C'''B} = \dots\dots\dots$$

Dunque:

Tutti i triangoli isobaricentrici con un triangolo dato e iscritti in esso segnano sopra i suoi lati tre punteggiate simili a due a due.

Si ha inoltre:

Se in un triangolo si iscrivono due triangoli isobaricentrici con esso, il triangolo che ha per lati i segmenti che i vertici di quei triangoli determinano sui lati è simile al dato.

Se A' cade in C , C' cadrà in B , e se A' cade in B , C' cadrà in A . Cioè nella detta similitudine al punto B corrispondono i punti A e C , secondo che B si suppone appartenere alla punteggiata BC o alla punteggiata BA .

Segue allora dalle nozioni di Geometria proiettiva che le rette analoghe a $B' C'$ involuppano una parabola, la quale tocca i lati AB , CB nei punti B e C . Si ha così il teorema:

Se dei vertici d'un triangolo isobaricentrico e iscritto, un vertice descrive un lato del triangolo fondamentale, il lato opposto involuppa una parabola, che è tangente agli altri due lati del triangolo fondamentale nei vertici situati sul primo lato.

Si può dire anche:

I lati di tutti i triangoli, isobaricentrici e iscritti, inviluppano un luogo del sesto ordine (e della sesta classe) costituito da tre parabole.

Queste tre parabole sono di facilissima costruzione, perchè di ciascuna di esse si conoscono due tangenti e i relativi punti di contatto. Queste tre parabole oltre che tagliarsi a due a due nei vertici del triangolo fondamentale, si tagliano in altri tre punti, vertici d'un triangolo curvilineo, i cui lati son tre archi delle dette parabole. Questo triangolo curvilineo contiene dentro di sè tutti i punti del piano per i quali non passano lati dei triangoli isobaricentrici ed iscritti. Da quanto precede si può enunciare il seguente teorema:

Dato un punto, esistono in generale sei triangoli isobaricentrici iscritti di ciascuno dei quali un lato passa per il punto dato.

Può notarsi che il minimo triangolo isobaricentrico è quello circoscritto al detto triangolo parabolico. Infatti questo triangolo è quello formato dalle rette che congiungono i punti di mezzo dei lati del dato triangolo fondamentale, che è isobaricentrico al dato. Ora il rapporto fra il triangolo $A' B' C'$ isobaricentrico iscritto e il triangolo $A B C$ è (V. Pesci, anno II del Periodico)

$$\frac{m^2 - m + 1}{(m + 1)^2}$$

dove m è il rapporto $B A' : A' C$. Quel rapporto diviene minimo per $m = 1$, ciò che mostra che il triangolo isobaricentrico iscritto e simile al dato, è il minimo fra i triangoli isobaricentrici iscritti.

Sia (fig. 2) $A' B' C'$ un triangolo isobaricentrico iscritto; si prolunghino le sue mediane fino a che incontrano i lati del triangolo fondamentale. Si ottengono due triangoli $A'' B'' C''$, $A''' B''' C'''$, dei quali il primo soltanto è segnato nella figura.

Intanto poichè $A' B' C'$ è isobaricentrico ed iscritto ad $A B C$, segue $\frac{B A'}{A' C} = \frac{C B'}{B' A} = \frac{A C'}{C' B} = m$.

Per essere MP' parallela a BA , si ha: $MA'' : BA'' = P'M : CB$ e $P'M = AC : 2$, sicchè

$$\frac{MA''}{BA''} = \frac{m}{2} \quad \text{quindi} \quad \frac{BM}{BA''} = \frac{2-m}{2} \quad \text{e} \quad \frac{BC}{BA''} = 2 - m.$$

Ma $BC = BA'' + A''C$, per cui $\frac{BA''}{A''C} = \frac{1}{1-m}$. Similmente risulta $\frac{CB''}{B''A} = \frac{AC''}{C''B} = \frac{1}{1-m}$, talchè anche il triangolo $A''B''C''$ è isobaricentrico ad ABC .

Alla stessa conclusione si arriva considerando il triangolo $A''B''C''$.
Dunque:

Se un triangolo è isobaricentrico con un altro ed iscritto, le sue mediane tagliano i lati del triangolo fondamentale nei vertici d'un secondo triangolo isobaricentrico con il dato, e tagliano i prolungamenti dei lati stessi nei vertici d'un terzo triangolo isobaricentrico.

Si costruisca il triangolo isobaricentrico $A'B'C'$ (fig. 3) del quale il lato $C'A'$ passi per B e il lato $C'B'$ passi per A . Se, restando fisso $C'B'$, il lato $C'A'$ ruota attorno a B , il punto M' descriverà una retta x ed il punto A' una retta y , parallele entrambe alla retta $C'B'$, e la prima passante per M e per il punto medio E di $C'A'$. Mentre C' descrive la punteggiata $C'B'$, M' descrive x , ed A' descrive y e le due punteggiate (M') , (A') saranno simili alla punteggiata (C') e perciò simili fra loro; e siccome sono parallele, saranno prospettive. Sia K il centro di prospettiva. Questo punto K cadrà nella mediana BN , perchè quando $C'B$ cade in BN , allora A' ed M' cadranno sulla mediana stessa. Se $C'B$ coincide con AB , M' cadrà in M e A' è il punto comune a BA ed y . Così il punto K si costruisce immediatamente. Dunque:

Se d'un triangolo isobaricentrico un lato passa per un vertice del triangolo fondamentale ed è fisso, mentre un altro lato ruota attorno a un altro vertice del triangolo fondamentale, il terzo lato descrive un fascio il cui centro si può costruire immediatamente.

Da questo teorema nasce la risoluzione del seguente problema.

Costruire un triangolo isobaricentrico circoscritto del quale sia data la direzione di un lato.

Se il lato dato passa per A , costruito K , come precedentemente, la retta KC sarà un'altro lato del triangolo richiesto.

Se $a' \equiv C' B'$ è parallela a $B N$ (fig. 4) e si costruisce K , il fascio $M (A V T N)$ è armonico, poichè T è punto medio di $V A$ ed $M N$ è parallela a $V A$, e perciò è armonico anche il gruppo $OK \infty N$. Così N è il punto medio di OK , e perciò $BO = OK$. Dunque: *Se dai vertici di un triangolo si conducono le parallele alle mediane, si ottengono due triangoli isobaricentrici con il dato.*

Riferiamoci alla fig. 3. Se a' ruota attorno ad A , descrive un fascio (a) proiettivo (uguale) al fascio (x) ; questo fascio è proiettivo (prospettivo) alla punteggiata (F) , descritta su AB , la punteggiata (F) è proiettiva alla punteggiata (G) , questa alla punteggiata (K) descritta su BN , e (K) al fascio (c') . Adunque i fasci (a') , (c') sono proiettivi fra loro. Per conseguenza il luogo del punto B' , comune a due raggi corrispondenti, è una conica che passa per A e C . Questa conica passa per O , per il punto simmetrico di B rispetto ad N (V . Panizza, anno III del Periodico) e per altri due punti determinati, com'è stato detto, dalle parallele alle mediane condotte per A e C . Questa conica si può dunque facilmente costruire col teorema di Pascal, ed è in generale una ellisse. Di queste ellissi se ne hanno tre. Una di esse può chiamarsi la ellisse relativa ai due vertici per i quali passa.

Si consideri (fig. 5) la ellisse relativa ai vertici A, C ; sia D il simmetrico di B rispetto ad N , E il punto comune alle AE, CE parallele alle mediane OC, ON , F il punto comune alle AF, CF rispettivamente parallele alle mediane ON, OA . Quella ellisse passerà, oltrechè per i punti A, C per i punti O, D, E, F . Siccome poi è manifestamente $OK = KD, AK = KE$, sarà K il centro della detta ellisse. Si può notare inoltre che la parallela condotta da K al lato AC è un diametro coniugato al diametro OD , il diametro FC è coniugato a quello che si ottiene guidando da K la parallela a BC ecc. Da quanto precede e da altre facili osservazioni, che si possono fare nella figura, e dal fatto che per le tre ellissi sono eguali le involuzioni dei diametri coniugati ed eguali per esempio il semidiametro AK e i due suoi corrispondenti nelle altre due ellissi, si hanno i seguenti teoremi:

Vi sono infiniti triangoli circoscritti a un triangolo dato e isobaricentrici con esso. Assegnata la direzione d'un lato il trian-

golo resta determinato in modo unico, e se il primo lato ruota attorno al vertice per il quale è stato condotto, i due lati rimanenti colla loro mutua intersezione generano una ellisse la quale passa per i due vertici rimanenti del triangolo fondamentale, per il baricentro comune e per altri tre punti determinabili immediatamente.

La conica relativa a due vertici del triangolo fondamentale ha per centro il punto simmetrico del vertice rimanente rispetto al baricentro comune.

I centri delle tre ellissi che rappresentano il luogo dei vertici dei triangoli isobaricentrici e circoscritti formano un triangolo isobaricentrico col dato, eguale ad esso, e coi lati paralleli a quelli del medesimo.

I lati di questo triangolo considerati come diametri hanno per coniugati le rette che uniscono i suoi vertici ai vertici del triangolo fondamentale che sono opposti ai lati del triangolo che si considera.

Quelle tre ellissi sono eguali fra loro.

Se allora una di queste ellissi diviene un cerchio, le altre due divengono cerchi eguali ad esso. Si ha così la conseguenza che se in un triangolo l'angolo di due mediane (porzioni comprese fra i vertici e il punto comune) è supplemento dell'angolo opposto, lo stesso avviene per gli altri angoli, e il triangolo è equilatero.

Si ha inoltre :

Data una retta vi sono in generale sei triangoli isobaricentrici circoscritti di ciascun dei quali un vertice cada sulla retta data.

I vertici situati sulla retta data sono i punti che la retta stessa ha in comune colle tre ellissi sopra considerate.

Catania, ottobre 1889.

SEBASTIANO CATANIA.

DIMOSTRAZIONE DELLA FORMOLA

CHE DÀ IL VOLUME D'UN TETRAEDRO IN FUNZIONE DEGLI SPIGOLI

Di un tetraedro sieno: $B_1 B_2 B_3$ una faccia triangolare ossia la base d'area S , $\overline{B_4 A} = a$ la lunghezza della perpendicolare abbassata dal vertice opposto ossia l'altezza del tetraedro rispetto a quella faccia, b_1, b_2, b_3 i tre spigoli lati del triangolo base, h_1, h_2, h_3 gli altri spigoli lati del triedro concorrenti nel vertice opposto alla base considerata; diciamo inoltre con m_1, m_2, m_3 le lunghezze delle congiungenti il piede A della perpendicolare coi vertici del triangolo $B_1 B_2 B_3$ che sono le proiezioni dei tre spigoli lati del triedro sul piano di base.

Il volume del tetraedro sarà:

$$[1] \quad V = \frac{1}{3} a S.$$

Per trovare l'espressione dell'altezza a del tetraedro in funzione dei suoi spigoli scriviamo la nota relazione esistente fra i sei lati di un tetragono piano (*) quale sarebbe nel nostro caso $B_1 B_2 B_3 A$, ossia:

$$[2] \quad \begin{vmatrix} 0 & b_3^2 & b_2^2 & m_1^2 & 1 \\ b_3^2 & 0 & b_1^2 & m_2^2 & 1 \\ b_2^2 & b_1^2 & 0 & m_3^2 & 1 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ed essendo pel teorema di Pitagora:

$$m_1^2 = h_1^2 - a^2, \quad m_2^2 = h_2^2 - a^2, \quad m_3^2 = h_3^2 - a^2$$

eseguita la sostituzione nel determinante ed aggiungendo agli elementi della 4^a colonna quelli della 5^a moltiplicati per a^2 e simul-

(*) *Periodico di Matematica*, 1886 - LORIA. Intorno ad alcune relazioni fra distanze. Pag. 38.

taneamente agli elementi della 4^a riga aggiungendovi quelli della 5^a moltiplicati pure per a^2 , dalla relazione [2] si ottiene la relazione unica esistente fra i sei spigoli ed un'altezza del tetraedro:

$$[3] \quad \begin{vmatrix} 0 & b_3^2 & b_2^2 & h_1^2 & 1 \\ b_3^2 & 0 & b_1^2 & h_2^2 & 1 \\ b_2^2 & b_1^2 & 0 & h_3^2 & 1 \\ h_1^2 & h_2^2 & h_3^2 & 2a^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando questo determinante e liberando il termine a^2 dal suo coefficiente avremo:

$$[4] \quad a^2 = \left\{ \begin{aligned} & -h_1^4 b_1^2 - h_2^4 b_2^2 - h_3^4 b_3^2 + h_1^2 h_2^2 (b_1^2 + b_2^2 - b_3^2) \\ & + h_2^2 h_3^2 (b_2^2 + b_3^2 - b_1^2) + h_3^2 h_1^2 (b_3^2 + b_1^2 - b_2^2) \\ & + h_1^2 b_1^2 (b_2^2 + b_3^2 - b_1^2) + h_2^2 b_2^2 (b_3^2 + b_1^2 - b_2^2) \\ & + h_3^2 b_3^2 (b_1^2 + b_2^2 - b_3^2) - b_1^2 b_2^2 b_3^2. \end{aligned} \right\} : (-1) \begin{vmatrix} 0 & b_3^2 & b_2^2 & 1 \\ b_3^2 & 0 & b_1^2 & 1 \\ b_2^2 & b_1^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Osserviamo che lo sviluppo del determinante simmetrico che figura al denominatore è il seguente:

$$\begin{aligned} D &= b_1^4 + b_2^4 + b_3^4 - 2(b_1^2 b_2^2 + b_2^2 b_3^2 + b_3^2 b_1^2) \\ &= - (b_1 + b_2 + b_3) (b_1 + b_2 - b_3) (b_1 + b_3 - b_2) (b_3 + b_1 - b_2) \\ &= - 16 p (p - b_1) (p - b_2) (p - b_3) = - 16 S^2. \end{aligned}$$

Se diciamo colla lettera R la quantità in parentesi, ossia il numeratore dell'espressione di a^2 , e per brevità la ricordiamo col nome di *risultante* del tetraedro, avremo:

$$a^2 = \frac{R}{16 S^2}.$$

Risalendo alla formula [1] si trova:

$$V^2 = \frac{16 \times a^2 S^2}{9 \times 16} \quad \text{ossia} \quad 144 V^2 = R.$$

Ed aggruppando i 22 termini contenuti nello sviluppo di R , funzione omogenea del 6° grado degli spigoli del tetraedro, il volume di questo si ricava dalla nota espressione (*) seguente:

(*) L. e. 1886. - Basso. Sul tetraedro a facce uguali. Pag. 2.

$$144 \quad V^2 = b_1^2 h_1^2 (b_2^2 + h_2^2 + b_3^2 + h_3^2 - b_1^2 - h_1^2) + b_2^2 h_2^2 (b_3^2 + h_3^2 + b_1^2 + h_1^2 - b_2^2 - h_2^2) \\ + b_3^2 h_3^2 (b_1^2 + h_1^2 + b_2^2 + h_2^2 - b_3^2 - h_3^2) - (h_1^2 h_2^2 b_3^2 + h_2^2 h_3^2 b_1^2 + h_3^2 h_1^2 b_2^2 + b_1^2 b_2^2 b_3^2).$$

L'applicazione della relazione [4] può essere utile nella ricerca di alcune proprietà del tetraedro di cui si hanno le dimostrazioni in molti importanti lavori (*).

Sassari, 8 maggio 1890.

Ing. GIUSEPPE DELITALA
Professore di Geometria pratica.

SULL' EQUAZIONE $x^y = y^x$ CON x ED y INTERI E POSITIVI

Siano α e β due numeri disuguali interi e positivi dei quali α sia il maggiore, che soddisfanno all'equazione:

$$x^y = y^x.$$

Sarà identicamente:

$$\alpha^\beta - \beta^\alpha = 0,$$

donde, posto: $\frac{\alpha}{\beta} = r$

$$\beta^\beta [r^\beta - \beta^{(r-1)\beta}] = 0 \quad \text{da cui:} \quad (r)^\beta - (\beta^{r-1})^\beta = 0$$

e perciò, poichè r e β^{r-1} sono positivi e β è intero, sarà identicamente: $r = \beta^{r-1}$ dalla quale eguaglianza e dalla posizione fatta si deduce:

$$\alpha = r^{\frac{r}{r-1}}, \quad \beta = r^{\frac{1}{r-1}} \quad (**).$$

Ora perchè α a β siano interi, come è ipotesi, r deve essere intero. Infatti se r fosse eguale ad una frazione irriducibile $\frac{m}{n}$ si avrebbero di α e di β rispettivamente i valori:

(*) L. c. 1886. - Besso. Sul tetraedro a facce uguali.

(**) EULERO. Introd. II § 519.

$$\sqrt[m-n]{\left(\frac{m}{n}\right)^m}, \sqrt[m-n]{\left(\frac{m}{n}\right)^n} \text{ nel caso di } m > n$$

e

$$\sqrt[n-m]{\left(\frac{m}{n}\right)^m}, \sqrt[n-m]{\left(\frac{m}{n}\right)^n} \text{ nel caso di } m < n$$

che non sono interi. Dovendo dunque r essere intero, non può essere che eguale a 2, e per conseguenza:

$$\alpha = 4, \beta = 2$$

perchè ogni altro valore intero di r dà per α e β valori non interi. Infatti nelle serie dei valori di α e β per

$$r = 3, 4, 5, \dots, s, s+1, \dots$$

che sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} \alpha) & \quad 3 \sqrt[3]{3}, \quad 4 \sqrt[4]{4}, \quad 5 \sqrt[5]{5}, \dots, (s+1) \sqrt[s+1]{s+1}, \dots \\ \beta) & \quad \sqrt[2]{3}, \quad \sqrt[2]{4}, \quad \sqrt[2]{5}, \dots, \sqrt[2]{s+1}, \dots \end{aligned}$$

non s'incontra mai un intero; giacchè se potesse essere:

$$\sqrt[s+1]{s+1} = i$$

e quindi:

$$[1] \quad i^s = s+1$$

con i intero ed $s \geq 2$, dovrebbe necessariamente essere $i > 1$ e posto $i = 1 + h$ dovrebbe h essere intero e soddisfare alla condizione:

$$[2] \quad h \geq 1$$

e la (1) diverrebbe:

$$[3] \quad (1+h)^s = s+1.$$

Ora avendosi per la [2]:

$$1 + h s \geq 1 + s$$

si dedurrebbe di qui per la [3]:

$$1 + hs \geq (1 + h)^s$$

ma questo risultato è falso, perchè si sa (*) che:

$$1 + hs < (1 + h)^s$$

dunque non si può ammettere $\sqrt[s]{s+1}$ intero.

Roma, 26 aprile 1890.

UGO DAINELLI.

SULL' UGUAGLIANZA $a^b = b^a$ CON a E b INTERI E POSITIVI

Nel primo fascicolo di quest'anno il Prof. BESSO ha trattato la stessa questione. Tuttavia ho creduto utile ritornarci sopra risolvendola in un modo alquanto più elementare.

1. Consideriamo l'uguaglianza

$$[1] \quad a + b = ab$$

dove a e b sono interi positivi, e vediamo per quali valori delle lettere essa è vera. Poichè dividendo ambo i membri per a o per b , il primo membro deve mantenersi intero, si riconosce che a e b devono essere multipli l'uno dell'altro; ciò vuol dire che deve essere $a = b$. Indichiamo con c il loro comune valore; dalla [1] si ha allora: $2c = c^2$ e quindi $c = 2$.

Pertanto l'uguaglianza [1] ha luogo solo pel valore 2 di a e b . Per ogni altra coppia di valori per a e b non inferiori a 2, nè entrambi uguali a 2, si ha:

$$a + b < ab$$

cioè: *La somma di due numeri interi e positivi non inferiori a 2 nè*

(*) Vedi qualunque Algebra, p. es. quella del BERTRAND trad. BETTI, pag. 297.

entrambi uguali a 2, è minore del loro prodotto. Infatti, uguale non può essere, nè maggiore giacchè, supposto $a \geq b$, se è

$$a + b > ab$$

si ha dividendo per a :

$$1 + \frac{b}{a} > b;$$

ma $\frac{b}{a} \leq 1$, quindi sarebbe $b < 2$ contro l'ipotesi di a e b entrambi non inferiori a 2.

2. La somma di tre numeri interi e positivi non inferiori a 2 è minore del loro prodotto.

Siano infatti a_1, a_2, a_3 tre di tali numeri e poniamo $p = a_1 a_2$; dovrà essere $p > 2$ perchè a_1 ed a_2 sono entrambi non inferiori a 2. Sarà quindi, per l'articolo precedente

$$p + a_3 < p a_3.$$

Ma $p \geq a_1 + a_2$, quindi sarà in ogni caso

$$a_1 + a_2 + a_3 < a_1 a_2 a_3.$$

Ammettiamo ora che per valori di $a_1, a_2, \dots, a_n$, interi e positivi, non inferiori a 2, si abbia

$$[2] \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n < a_1 a_2 \dots a_n.$$

Posto $p = a_1 a_2 \dots a_n$, si vede che deve essere $p > 2$ perchè ciascuna a non può essere minore di 2. Indicando pertanto con a_{n+1} un numero intero e positivo non inferiore a 2, si avrà sempre

$$p + a_{n+1} < p a_{n+1}.$$

Ma per la [2] è $p > a_1 + a_2 + \dots + a_n$ quindi a fortiori sarà:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} < a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}.$$

Poichè la [2] è vera per il caso di tre termini, essa è vera in generale. Si ha quindi che: *L'uguaglianza:*

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 a_2 \dots a_n,$$

in cui le lettere rappresentano interi positivi non inferiori a 2,

è vera soltanto per $n = 2$, cioè nel caso di due numeri, ciascuno dei quali ha allora (per l'articolo precedente) il valore 2.

Posto $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$ si ricava che: *L'uguaglianza:*

$$an = a^n$$

con a non inferiore a 2 ed $n > 1$, non può verificarsi che nel caso di $a = n = 2$.

3. *L'uguaglianza*

[3]

$$a^b = b^a$$

con a e b interi e positivi, ha luogo soltanto quando uno dei numeri è uguale a 2 e l'altro a 4.

Supponiamo $a > b$ ed indichiamo con p un divisore primo di a ; esso dovrà essere, per la [3], divisore anche di b . Quindi se α e β sono gli esponenti coi quali il divisore p entra in a e b rispettivamente, dovrà aversi

$$\alpha b = \beta a$$

sempre per la [3]. Ma $a > b$, quindi sarà $\alpha > \beta$. Segue da ciò che a è multiplo di b , perchè contiene tutti i divisori primi di b con esponenti rispettivamente maggiori. Poniamo adunque

[4]

$$a = bq.$$

Sostituendo nella [3] si ottiene

$$(bq)^b = b^{bq},$$

cioè [5]

$$bq = b^q.$$

Ora b non può essere inferiore a 2, perchè allora la [3] non si verifica, ne $q = 1$, perchè altrimenti sarebbe $a = b$, contro l'ipotesi di $a > b$. Per cui (per il n.º precedente), l'uguaglianza [5] non può verificarsi se non è

$$b = q = 2$$

e quindi in tal caso dalla [4] si ricava

$$a = 4.$$

PROF. LUIGI CARLINI.

DEI CIRCOLI CIRCOSCRITTI AI TRIANGOLI

FORMATI DA n RETTE POSTE IN UN PIANO

§ 1. In quel che segue supporremo sempre che tutti gli angoli, posti in uno stesso piano, siano descritti con rotazioni dello stesso senso e considereremo come eguali due angoli che differiscano per un multiplo di 360° (*); indicheremo poi

con (ab) l'angolo formato dalle due rette a e b (siccome la direzione dei lati dell'angolo in seguito non sarà determinata, questa notazione indicherà due diversi angoli, differenti di 180° , ma questa ambiguità non avrà nessuna influenza, perchè dell'angolo (ab) noi considereremo sempre il doppio),

con (ACB) l'angolo formato dal segmento di retta determinato dai due punti A e C col segmento di retta determinato dai due punti C e B .

Derivano immediatamente le seguenti conseguenze:

I) se C è il punto d'intersezione di due rette a e b , se inoltre A è un altro punto della retta a e B un altro punto della retta b , si ha sempre

$$2(ab) = 2(ACB),$$

II) se $A'C'$ e $B'C'$ sono due segmenti di retta rispettivamente perpendicolari agli altri due segmenti AC e BC , si ha sempre

$$2(A'C'B') = 2(ACB),$$

III) condizione necessaria e sufficiente affinchè tre punti A , B , C , in ordine non determinato, siano sopra una retta è che si abbia

$$2(ABC) = 0,$$

(*) Cfr. BALTZER - *Planimetria*, § 2, 4.

IV) condizione necessaria e sufficiente affinchè quattro punti A, B, C, D , in ordine non determinato, siano sopra una circonferenza è che si abbia (*)

$$2(ACB) = 2(ADB).$$

§ 2. *Quattro rette poste in un piano, prese a tre a tre, determinano quattro triangoli: le quattro circonferenze circoscritte a questi triangoli*

I) *passano per un punto.*

II) *hanno i loro centri sopra un'altra circonferenza (**).*

Prima di tutto stabiliamo d'indicare

con a_1, a_2, a_3, a_4 le quattro rette,

con p, q, r, s i quattro numeri 1, 2, 3, 4 in qualunque ordine,

con $C_{p,q}^4$ il punto d'intersezione delle due rette, che restano, quando si escludano le due rette a_p e a_q (***),

con C_p^4 il centro della circonferenza circoscritta al triangolo che resta, quando si escluda la retta a_p ,

con P^4 il punto pel quale devono passare le quattro circonferenze $C_1^4, C_2^4, C_3^4, C_4^4$,

con C^4 il centro della circonferenza sulla quale si debbono trovare i centri di queste quattro circonferenze;
ed osserviamo che si avrà sempre

$$[1] \dots\dots\dots 2(C_{p,s}^4 C_{r,s}^4 C_{q,s}^4) = 2(a_q a_p),$$

perchè $C_{r,s}^4$ è l'intersezione delle due rette a_p ed a_q e i punti $C_{p,s}^4$ e $C_{q,s}^4$ si trovano rispettivamente sulla prima e sulla seconda di queste rette (§ 1, I).

Ciò preposto passiamo a dimostrare separatamente la I e la II parte del teorema enunciato.

I) condizione necessaria e sufficiente affinchè le quattro circonferenze passino pel punto P^4 è che si abbia (§ 1, IV)

(*) Cfr. BALTZER - I. c. § 4, 3.

(**) Questo teorema è dovuto allo STEINER, il quale ne propose la dimostrazione nel T. XVIII (pag. 302) degli *Annales des Mathématiques*. Della prima parte si conoscono varie dimostrazioni (Cfr. BALTZER - I. c. § 4, 7 — MIQUEL - *Journal des Mathématiques*, T. III pag. 485); ma la dimostrazione qui esposta offre il vantaggio di poter essere estesa ai casi che considereremo in seguito.

(***) La scelta di questa notazione, che in questo primo caso rende un poco più laboriosa la esposizione, sarà giustificata da quel che segue.

$$[2] \dots \dots \dots 2 (C_{p,s}^4 P^4 C_{q,s}^4) = 2 (C_{p,s}^4 C_{r,s}^4 C_{q,s}^4),$$

la quale, per la [1], equivale all'altra

$$[3] \dots \dots \dots 2 (C_{p,s}^4 P^4 C_{q,s}^4) = 2 (a_q a_p).$$

Consideriamo due qualunque di quelle quattro circonferenze, per es. C_1^4 e C_2^4 : queste hanno in comune il punto $C_{1,2}^4$ e un altro punto, ma le altre due circonferenze C_3^4 e C_4^4 non passano, in generale, per $C_{1,2}^4$ dunque quest'altro punto dev'essere P^4 ; quindi, per dimostrare quanto ci siamo proposto, potremo supporre vera la [3] quando ad s si attribuiscono i valori 1 e 2, e far vedere che essa è vera anche quando a questa lettera si attribuiscono i valori 3 e 4. Basterà limitarsi al primo di questi valori, perchè un ragionamento analogo varrà per l'altro; inoltre, posto $s = 3$, basterà dimostrare che la [3] è vera quando a p e a q si attribuiscono ordinatamente i valori 1 e 2, ossia che si ha

$$[4] \dots \dots \dots 2 (C_{1,3}^4 P^4 C_{2,3}^4) = 2 (a_2 a_1)$$

perchè allora sarà pure, per la [1],

$$2 (C_{1,3}^4 P^4 C_{2,3}^4) = 2 (C_{1,3}^4 C_{3,4}^4 C_{2,3}^4),$$

cioè il punto P^4 assieme ai tre punti $C_{1,3}^4$ $C_{2,3}^4$ $C_{3,4}^4$ sarà sulla circonferenza C_3^4 e quindi la [2], e per conseguenza la [3], sarà vera anche quando alle lettere p e q si attribuiscono due qualunque dei tre valori 1, 2 e 4.

Osserviamo perciò che la [4] equivale all'altra

$$2 (C_{1,3}^4 P^4 C_{1,2}^4) + 2 (C_{1,2}^4 P^4 C_{2,3}^4) = 2 (a_2 a_1);$$

ora, essendo i quattro punti $C_{1,2}^4$ $C_{1,3}^4$ $C_{1,4}^4$ P^4 tutti sulla circonferenza C_1^4 , si ha

$$2 (C_{1,3}^4 P^4 C_{1,2}^4) = 2 (C_{1,3}^4 C_{1,4}^4 C_{1,2}^4),$$

e analogamente

$$2 (C_{1,2}^4 P^4 C_{2,3}^4) = 2 (C_{1,2}^4 C_{2,4}^4 C_{2,3}^4),$$

dunque dovrà essere

$$2 (C_{1,3}^4 C_{1,4}^4 C_{1,2}^4) + 2 (C_{1,2}^4 C_{2,4}^4 C_{2,3}^4) = 2 (a_2 a_1).$$

Ma, per la [1], si ha

$$2 (C_{1,3}^4 C_{1,4}^4 C_{1,2}^4) = 2 (a_2 a_3) \quad 2 (C_{1,2}^4 C_{2,4}^4 C_{2,3}^4) = 2 (a_3 a_1),$$

onde l'eguaglianza da dimostrare si trasforma nell'altra

$$2 (a_2 a_3) + 2 (a_3 a_1) = 2 (a_2 a_1),$$

la quale è evidente.

II) Si consideri l'angolo $(C_p^4 C_i^4 C_q^4)$, siccome il segmento $C_{p,i}^4, P^4$ è la corda comune delle due circonferenze C_p^4 e C_i^4 , e il segmento $C_{q,i}^4, P^4$ è la corda comune delle due circonferenze C_q^4, C_i^4 , si avrà (§ 1, II)

$$2 (C_p^4 C_i^4 C_q^4) = 2 (C_{p,i}^4, P^4 C_{q,i}^4,)$$

e quindi per la [3]

$$[5] \dots\dots\dots 2 (C_p^4 C_i^4 C_q^4) = 2 (a_q a_p).$$

Questa eguaglianza dimostra la seconda parte del teorema, perchè per essa si avrà

$$2 (C_p^4 C_i^4 C_q^4) = 2 (C_p^4 C_r^4 C_q^4).$$

§ 3. Dopo avere stabilite notazioni analoghe a quelle del § prec. e con analogo ragionamento si dimostra facilmente quest'altro teorema:

Cinque rette poste in un piano, prese a quattro a quattro, determinano pel teorema precedente cinque circonferenze: queste cinque circonferenze

I) *passano per un punto,*

II) *hanno i loro centri sopra un'altra circonferenza.*

Vogliamo ora dimostrare che si ha il teorema generale

n rette poste in un piano, prese a $n - 1$ a $n - 1$, determinano col procedimento precedente n circonferenze: queste n circonferenze

I) *passano per un punto,*

II) *hanno i loro centri sopra un'altra circonferenza.*

Ci serviremo del metodo d'induzione. Perciò, stabilito d'indicare

con $a_1, a_2, \dots a_{n-1}, a_n$ le n rette,

con $p, q, r, \dots v$ i numeri $1, 2, 3, \dots n - 1$ presi in qualunque ordine,

con $p, q, r, \dots w$ i numeri $1, 2, 3, \dots n$ presi pure in ordine qualunque,

con $C_{p,q}^{n-1}$ il centro della circonferenza determinata col procedimento precedente dalle $n - 3$ rette che restano, quando dalle $n - 1$ rette $a_1, a_2, \dots a_{n-1}$ si escludano le due rette a_p ed a_q (nel caso di $n = 5$ questo punto è l'intersezione di due rette),

con C_p^{n-1} il centro della circonferenza determinata nello stesso modo dalle $n - 2$ rette che restano quando dalle stesse $n - 1$ rette si escluda la retta a_p solamente, ammetteremo che si abbiano le due uguaglianze

$$[6] \dots\dots 2 (C_{p,v}^{n-1} P^{n-1} C_{q,v}^{n-1}) = 2 (C_{p,v}^{n-1} C_{r,v}^{n-1} C_{q,v}^{n-1}) \quad (\text{Cfr. la [2]}),$$

$$[7] \dots\dots 2 (C_p^{n-1} C_v^{n-1} C_q^{n-1}) = 2 (a_q a_p) \quad (\text{Cfr. la [5]}),$$

dalle quali risulta dimostrato il nostro teorema per $n - 1$ rette (P^{n-1} indica il punto pel quale passano le $n - 1$ circonferenze), e faremo vedere come, stabilite notazioni analoghe alle precedenti, da queste derivino necessariamente le altre due

$$[8] \dots\dots\dots 2 (C_{p,w}^n P^n C_{q,w}^n) = 2 (C_{p,w}^n C_{r,w}^n C_{q,w}^n),$$

$$[9] \dots\dots\dots 2 (C_p^n C_w^n C_q^n) = 2 (a_q a_p),$$

che dimostrano appunto il nostro teorema per n rette.

Premettiamo che nella nostra ipotesi si avrà sempre

$$[10] \dots\dots\dots 2 (C_{p,w}^n C_{r,w}^n C_{q,w}^n) = 2 (a_q a_p) \quad (\text{Cfr. la [1]}),$$

perchè, se dalle n rette $a_1, a_2, \dots a_n$ si esclude la retta a_w , restano le $n - 1$ rette $a_p, a_q, \dots a_v$ e allora si vede che questa [10] non è altro che la [7] scritta sotto altra forma; in forza di questa [10] la [8] equivale all'altra

$$[11] \dots\dots\dots 2 (C_{p,w}^n P^n C_{q,w}^n) = 2 (a_q a_p) \quad (\text{Cfr. la [3]}).$$

I) Ciò posto cominciamo dal dimostrare la [11]. Consideriamo perciò due qualunque delle n circonferenze $C_1^n, C_2^n, \dots C_n^n$, p. es. C_1^n, C_2^n , la prima delle quali (per quanto si è ammesso) passa per gli $n - 1$ punti $C_{1,2}^n, C_{1,3}^n, C_{1,4}^n, \dots C_{1,n}^n$ e la seconda per gli $n - 1$ punti $C_{1,2}^n, C_{2,3}^n, C_{2,4}^n, \dots C_{2,n}^n$: queste due circonferenze hanno in comune il punto $C_{1,2}^n$ e un altro punto, ma le altre $n - 2$ circon-

ferenze $C_3^n, C_4^n, \dots C_n^n$ non passano in generale per $C_{1,2}^n$ dunque quest'altro punto deve essere P^n ; quindi, per dimostrare quanto ci siamo proposto, potremo supporre vera la [11] quando a w si attribuiscono i valori 1 e 2 e far vedere che essa è vera anche quando a questa lettera si attribuiscono i valori 3, 4, n . Basterà, come precedentemente, limitarsi al primo di questi valori, perchè un ragionamento analogo varrà per gli altri $n - 3$; inoltre, posto $w = 3$, basterà dimostrare che la [11] è vera quando a p e a q si attribuiscono ordinatamente i valori 1 e 2, ossia che si ha

$$[12] \dots\dots\dots 2 (C_{1,3}^n P^n C_{2,3}^n) = 2 (a_2 a_1),$$

perchè allora sarà pure, per la [10],

$$2 (C_{1,3}^n P^n C_{2,3}^n) = 2 (C_{1,3}^n C_{3,r}^n C_{2,3}^n), (r = 4, 5, \dots n),$$

cioè il punto P^n assieme agli $n - 1$ punti $C_{3,r}^n$ ($r = 4, 5, \dots n$) sarà sulla circonferenza C_3^n , e quindi la [8], e per conseguenza la [11], sarà vera anche quando alle lettere p e q si attribuiscono due qualunque degli $n - 1$ valori 1, 2, 4, 5, n .

Osserviamo perciò che la [12] equivale all'altra

$$2 (C_{1,3}^n P^n C_{1,2}^n) + 2 (C_{1,2}^n P^n C_{2,3}^n) = 2 (a_2 a_1),$$

ora, essendo i quattro punti $C_{1,2}^n, C_{1,3}^n, C_{1,4}^n, P^n$ sulla circonferenza C_1^n , si ha

$$2 (C_{1,3}^n P^n C_{1,2}^n) = 2 (C_{1,3}^n C_{1,4}^n C_{1,2}^n),$$

e analogamente

$$2 (C_{1,2}^n P^n C_{2,3}^n) = 2 (C_{1,2}^n C_{2,4}^n C_{2,3}^n),$$

dunque dovrà essere

$$2 (C_{1,3}^n C_{1,4}^n C_{1,2}^n) + 2 (C_{1,2}^n C_{2,4}^n C_{2,3}^n) = 2 (a_2 a_1).$$

Ma per la [10] si ha

$$2 (C_{1,3}^n C_{1,4}^n C_{1,2}^n) = 2 (a_2 a_3), \quad 2 (C_{1,2}^n C_{2,4}^n C_{2,3}^n) = 2 (a_3 a_1),$$

onde l'eguaglianza da dimostrarsi anche qui si trasforma nell'altra

$$2 (a_2 a_3) + 2 (a_3 a_1) = 2 (a_2 a_1),$$

che è evidente.

II) **Passiamo a dimostrare la [9].** Siccome il segmento $C_{p,w}^n P^n$ è la corda comune alle due circonferenze C_p^n e C_w^n e il segmento $C_{q,w}^n P^n$ è la corda comune alle due circonferenze C_q^n e C_w^n , si ha subito

$$2 (C_p^n C_w^n C_q^n) = 2 (C_{p,w}^n P^n C_{q,w}^n);$$

da questa e dalla [11] risulta immediatamente la [9] in questione.

§ 4. Dietro le considerazioni precedenti si conclude che

n rette poste in un piano (supposto $n > 4$) determinano generalmente un punto e una circonferenza,

punto e circonferenza che si trovano col procedimento indicato.

Le considerazioni del CLIFFORD (*), che hanno per punto di partenza la sola prima parte del teorema del § 2, conducono invece a questa conclusione:

n rette poste in un piano determinano un punto, se n è pari, e una circonferenza, se n è dispari,

punto e circonferenza che, tolto il caso di $n = 4$, si determinano con un procedimento diverso dal nostro.

§ 5. Termineremo col dimostrare anche il seguente teorema:

La circonferenza determinata da quattro rette, passa pel punto determinato dalle stesse quattro rette;

questo teorema, pure dovuto allo STEINER (l. c. al § 2), si verifica solo in questo caso, ossia

la circonferenza determinata da più di quattro rette non passa, in generale, pel punto determinato dalle stesse rette.

Affinchè la circonferenza C^n passi pel punto P^n è condizione necessaria e sufficiente che si abbia

$$2 (C_p^n C_q^n P^n) = 2 (C_p^n C_r^n P^n).$$

Ora: $C_{p,q}^n P^n$ è la corda comune alle due circonferenze C_p^n e C_q^n quindi

$$2 (C_p^n C_q^n P^n) = (C_{p,q}^n C_q^n P^n),$$

ma i punti $C_{p,q}^n, C_{q,r}^n, P^n$ sono tutti sulla circonferenza C_q^n quindi anche

$$(C_{p,q}^n C_q^n P^n) = 2 (C_{p,q}^n C_{q,r}^n P^n),$$

(*) Cfr. *Il senso comune nelle Scienze Esatte* - Ed. Dumolard, Milano.

per cui

$$2 (C_p^n C_q^n P^n) = 2 (C_{p,q}^n C_{q,r}^n P^n)$$

e analogamente

$$2 (C_p^n C_r^n P^n) = 2 (C_{p,r}^n C_{q,r}^n P^n).$$

Dietro queste due uguaglianze la condizione precedente si trasforma nell'altra

$$2 (C_{p,q}^n C_{q,r}^n P^n) = 2 (C_{p,r}^n C_{q,r}^n P^n),$$

ossia

$$2 (C_{p,q}^n C_{q,r}^n P^n) + 2 (P^n C_{q,r}^n C_{p,r}^n) = 0,$$

ossia

$$2 (C_{p,q}^n C_{q,r}^n C_{p,r}^n) = 0.$$

Questa condizione è certamente verificata per $n = 4$, perchè allora i punti $C_{p,q}^4, C_{q,r}^4, C_{p,r}^4$ sono tutti sulla retta σ_s (§ 1, III). Resta a dimostrarsi che essa non può, in generale, essere verificata per $n > 4$.

Dopo avere, al solito, convenuto di indicare con $C_{p,q,r}^n$ il centro della circonferenza determinata dalle $n - 3$ rette, che restano, quando si escludano le rette $\sigma_p, \sigma_q, \sigma_r$, e con P_p^n il punto determinato dalle $n - 1$ rette, che restano, quando si escluda la retta σ_p , si osservi che, essendo $C_{p,q,r}^n P_q^n$ la corda comune alle due circonferenze $C_{p,q}^n$ e $C_{q,r}^n$, e $C_{p,q,r}^n P_r^n$ la corda comune alle due circonferenze $C_{q,r}^n$ e $C_{p,r}^n$, sarà

$$2 (C_{p,q}^n C_{q,r}^n C_{p,r}^n) = 2 (P_q^n C_{p,q,r}^n P_r^n)$$

e che quindi la condizione da verificarsi diventa

$$2 (P_q^n C_{p,q,r}^n P_r^n) = 0.$$

Ma questa, in generale, non è vera perchè i tre punti $P_p^n, C_{p,q,r}^n, P_r^n$ sono sulla circonferenza $C_{q,r}^n$ e quindi, in generale, non sono in linea retta, onde anche la seconda parte del teorema è dimostrata.

GIUSEPPE PESCI.

TEMI DI MATEMATICA

PER LA LICENZA D'ISTITUTO TECNICO

NELLA SEZIONE FISICO-MATEMATICA (*)

ESTATE 1890, I). — *Un cilindro e un tronco di cono hanno a comune una base e l'altezza, e il rapporto dei loro volumi è il numero a . Trovare il rapporto dei raggi delle due basi del tronco di cono e discutere il risultato.*

Chiamando R , r i raggi delle basi del tronco, e supponendo che la base comune ai due solidi sia quella di raggio R , l'equazione a cui dà luogo il problema è

$$R^2 = \frac{a}{3} (R^2 + r^2 + Rr),$$

la quale, ponendo $r : R = \rho$, si trasforma nella seguente

$$a\rho^2 + a\rho + a - 3 = 0.$$

Si ha dunque

$$\rho = \frac{-a + \sqrt{12a - 3a^2}}{2a} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{a} - \frac{3}{4}}. \quad [1]$$

Poichè ρ è quantità di sua natura positiva, non solo devesi prendere, come si è fatto, il segno $+$ pel radicale, ma conviene inoltre che a sia tale che si abbia $12a - 3a^2 \geq a^2$, ossia $a \leq 3$; così a può assumere qualunque valor positivo da 0 a 3. Per $a = 1$ segue, per l'ultimo membro della [1], $\rho = 1$ e per $a > 1$ si ha $\rho < 1$ e viceversa, così per $a > 1$ è $r < R$ ciò che viene a supporre il cilindro eretto sulla base maggiore del tronco, mentre per $a < 1$ è $r > R$ ed il cilindro ha per base la base minore del tronco. Finalmente per $a = 3$ si ha $\rho = 0$, quindi $r = 0$ (escludendo $R = \infty$): la base superiore del tronco si riduce così ad un punto.

(*). Il lettore potrà notare che i due primi temi che seguono sono quelli assegnati per la licenza nella sessione d'esami testè chiusa. Dobbiamo poi l'enunciato di gli altri quesiti alla cortesia del Ch.mo Prof. M. Misani, preside del R. Istituto tecnico di Udine, al quale siamo lieti di poter rendere pubbliche grazie.

ESTATE 1890, II). — *Un cono cavo contiene n sfere collocate l'una sopra l'altra, in modò che ciascuna sfera tocca la sfera che le sta sotto, quella che le sta sopra e la superficie interna del cono. Conoscendo il raggio della sfera suprema e la distanza del suo centro dal vertice del cono, trovare il raggio e la distanza analoga per un'altra qualunque delle sfere; e dimostrare che i raggi delle sfere formano una progressione geometrica; che le distanze dei centri dal vertice formano un'altra progressione geometrica e che le due progressioni hanno la stessa ragione.*

Siano: r_1 il raggio della sfera suprema, a_1 la distanza del suo centro dal vertice del cono; r_n ed a_n gli analoghi elementi per la n^{esima} sfera. È chiaro che si avrà

$$r_2 - r_1 : r_1 = a_2 - a_1 : a_1$$

e per essere $a_2 - a_1 = r_2 + r_1$,

$$r_2 = r_1 \cdot \frac{a_1 + r_1}{a_1 - r_1}.$$

Dalla relazione $a_2 = \frac{r_2}{r_1} \cdot a_1$, si ricava poi

$$a_2 = a_1 \cdot \frac{a_1 + r_1}{a_1 - r_1}.$$

Similmente deducesi

$$r_3 = r_2 \cdot \frac{a_2 + r_2}{a_2 - r_2} = r_2 \cdot \frac{\frac{r_2}{r_1} a_1 + r_2}{\frac{r_2}{r_1} a_1 - r_2} = r_1 \cdot \left(\frac{a_1 + r_1}{a_1 - r_1} \right)^2,$$

$$r_4 = r_1 \left(\frac{a_1 + r_1}{a_1 - r_1} \right)^3, \dots \quad r_n = r_1 \left(\frac{a_1 + r_1}{a_1 - r_1} \right)^{n-1}$$

e

$$a_3 = a_2 \cdot \frac{a_2 + r_2}{a_2 - r_2} = a_1 \left(\frac{a_1 + r_1}{a_1 - r_1} \right)^2, \dots \quad a_n = a_1 \left(\frac{a_1 + r_1}{a_1 - r_1} \right)^{n-1}.$$

Dai valori ottenuti per r_n ed a_n , che rispondono al quesito, segue poi che i raggi delle sfere formano una progressione geometrica, che le distanze dei centri dal vertice del cono formano un'altra progressione geometrica e che le due progressioni hanno la stessa ragione

$$\frac{a_1 + r_1}{a_1 - r_1}.$$

ESTATE 1889, II). — È data la somma a di tre numeri x, y, z in progressione aritmetica ed è dato il loro prodotto b ; trovare questi numeri e discutere i risultati.

Risposta. I numeri cercati sono

$$x = \frac{a}{3} + \sqrt{\frac{a^3 - 27b}{9a}}, \quad y = \frac{a}{3}; \quad z = \frac{a}{3} - \sqrt{\frac{a^3 - 27b}{9a}}.$$

Il problema ha due soluzioni che conducono agli stessi numeri, salvo il loro ordine. I numeri cercati sono reali se $a^3 \geq 27b$, immaginari nel caso contrario. Essendo poi $\frac{a^3 - 27b}{9a} = \frac{a^2}{9} - 3\frac{b}{a}$ si vede che a e b possono avere qualunque segno, senza che perciò il problema sia impossibile, mentre se a e b hanno segni contrari i numeri cercati sono sempre reali.

ESTATE 1871, a). — Dimostrare la relazione trigonometrica

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b - \operatorname{sen}(a+b) = 4 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \operatorname{sen} \frac{b}{2} \operatorname{sen} \frac{a+b}{2}.$$

Dalle formule

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}, \quad \operatorname{sen}(a+b) = 2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$$

si ha subito

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b - \operatorname{sen}(a+b) &= 2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \left\{ \cos \frac{a-b}{2} - \cos \frac{a+b}{2} \right\} \\ &= 4 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \operatorname{sen} \frac{b}{2} \operatorname{sen} \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

(Continua).

A. LUGLI.

ALCUNI TEMI DI MATEMATICA

PROPOSTI PER LA LICENZA LICEALE (*)

1. Dati i quadrati q_1, q_2, q_3 delle bisettrici degli angoli d'un triangolo e i rettangoli r_1, r_2, r_3 dei segmenti in cui ciascun lato è diviso dalla bisettrice dell'angolo opposto, calcolare la lunghezza dei tre lati e dimostrare che in ogni triangolo rettangolo, la somma del quadrato

(*) La redazione ringrazia quei Signori Presidi e Insegnanti che ebbero la gentilezza di comunicare i temi che seguono.

della bisettrice dell'angolo retto, col rettangolo dei segmenti in cui l'ipotenusa resta divisa è doppia dell'area del triangolo.

2. Valendosi della nota proprietà delle radici dell'equazione di secondo grado, si dimostri che la somma ed il prodotto delle radici dell'equazione

$$q x^2 - p(1 - q)x + q^3 = 0$$

sono rispettivamente la somma delle radici delle equazioni:

$$\begin{aligned} x^2 + p x + q &= 0 \\ q x^2 - p x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

e il prodotto delle radici di questa, per le terze potenze delle radici dell'altra.

3. Se da un punto di un cerchio si calano le perpendicolari su due tangenti che si tagliano e la perpendicolare sulla retta che passa per i punti di contatto, questa terza perpendicolare è media proporzionale tra le altre due.

4. I centri delle faccie d'un cubo, son vertici d'un ottaedro regolare, e viceversa i piani condotti per due vertici opposti d'un ottaedro e paralleli al piano degli altri quattro vertici, sono facce di un cubo.

Un cubo è equivalente a sei volte l'ottaedro regolare avente per vertici i centri delle facce di esso.

(*R. Liceo di Benevento*).

1. Descrivere con raggio dato un circolo tangente ad una retta e a una circonferenza data.

2. Costruire un triangolo conoscendosi un lato, un angolo ed un' altezza.

3. Un corriere percorre nel tempo t e colla velocità costante v il perimetro di un triangolo rettangolo di cui si conosce l'ipotenusa, calcolare i cateti.

4. Segare una sfera con un piano tale che l'area del circolo massimo sia media proporzionale fra le calotte determinate dal piano.

(*R. Liceo di Brescia*).

1. Dimostrare che prolungando i lati AB e CD di un rettangolo dato $ABCD$, di una medesima lunghezza x ed i lati BC e DA di una medesima lunghezza y , si ottengono quattro punti che sono vertici di un parallelogrammo, e determinare la relazione che deve esistere fra x e y perchè il parallelogrammo diventi una losanga.

2. Determinare il numero dei termini di una progressione aritmetica, nella quale il primo termine vale 10, la ragione 5 e la somma dei termini 175.

(*R. Liceo di Casale Monferrato*).

1. Inscrivere in un quadrato dato un quadrato, il cui lato sia eguale ed un dato segmento.

Il candidato può risolvere il problema anche con l'aiuto dell'algebra, e ricavare dal risultato ottenuto una costruzione geometrica.

(*R. Liceo di Ferrara*).

1. Un numero è formato di 3 cifre che sono in progressione geometrica. La somma delle cifre è 13 e se al numero si aggiunge 792 si ottiene il numero scritto con le stesse cifre, ma schierate nell'ordine inverso.

2. Data l'equazione:

$$x^2 - px + 6 = 0,$$

si determini p in modo che sia

$$x_1^2 + x_2^2 = 24.$$

3. Essendo R il raggio di una sfera, calcolare l'altezza x di un cono la cui base è un parallelo della sfera, il vertice è il centro della sfera e la superficie laterale la decima parte della superficie della sfera.

4. Tagliare una sfera con due piani paralleli ed egualmente lontani dal centro della sfera in modo, che la somma delle aree delle due sezioni sia uguale all'area della zona compresa fra i due piani.

(*R. Liceo di Foggia*).

1. Quali valori bisogna attribuire ad a , b , c perchè si abbia identicamente:

$$(a + b)x^2 + (a + c)x + b^2 + c^2 = (m - 3)x^2 + 2x + a^2$$

essendo m un numero dato?

2. Se A , B , C sono i punti nei quali un piano arbitrario taglia rispettivamente i tre spigoli di un angolo triedro trirettangolo di vertice S , ed S ha O per proiezione nel piano ABC , il triangolo ASB è medio proporzionale fra i triangoli ABC ed OAB .

(*R. Liceo di Lucca*).

1. In un cerchio dato si inseriva un quadrangolo convesso e tale che due lati opposti siano uguali a due segmenti dati e che i lati rimanenti siano proporzionali a due altri segmenti dati.

2. Due punti partono in uno stesso istante dal vertice di un angolo retto e ne percorrono i lati con moto uniforme e con le velocità rispettive di a metri e b metri al minuto secondo.

Si dimostri che le distanze dei due punti dopo uno, due, tre, quattro . . . secondi formano una progressione per differenza e si calcoli la somma dei primi n termini di questa progressione.

(*R. Liceo di Mondovì*).

1. Se si iscrive in un triangolo equilatero di lato a un circolo: in questo circolo un triangolo equilatero, in questo triangolo di nuovo un circolo e così di seguito indefinitamente, si domanda qual'è la somma dei perimetri di tutti i triangoli descritti, escluso quello del triangolo dato.

2. Le altezze di un triangolo sono le bisettrici degli angoli del triangolo che ha per vertici i piedi delle altezze stesse.

(*R. Liceo di Novara*).

1. Costruire un cerchio che passi per due punti dati e tocchi una retta data.

2. Dato un cerchio di centro O , se si denotano con A e B i punti d'intersezione di una tangente qualunque con due tangenti parallele fisse, dimostrare che l'angolo $A O B$ è retto.

3. Di 20 termini consecutivi di una progressione aritmetica, si conosce la somma dei termini di posto dispari e la somma dei termini di posto pari. Determinare la progressione.

4. Calcolare il volume di una piramide di altezza h , sapendo che la base è un decagono regolare di lato uguale ad a .

(*R. Liceo G. Garibaldi di Palermo*).

1. I segmenti che uniscono il punto di mezzo di un lato d'un triangolo con le proiezioni degli estremi di esso lato sulla bisettrice dell'angolo opposto sono uguali alla semidifferenza degli altri due lati del triangolo e comprendono un angolo uguale alla somma degli altri due del triangolo.

2. Costruire un parallelogramma che abbia un angolo e le distanze dei lati adiacenti dal punto d'incontro delle diagonali eguali, rispettivamente, ad un angolo e a due segmenti dati.

3. La superficie d'un rettangolo è uguale alla m^{ma} parte del quadrato della diagonale ed il perimetro del rettangolo è di m . a : calcolare i lati del rettangolo.

4. La superficie totale di un cono è equivalente a quella d'una sfera che ha il raggio di m . a e la somma del lato col diametro della base è m . b . Calcolare lato e raggio della base del cono.

(*R. Liceo V. E. di Palermo*).

1. Per un estremo A di un diametro AB di un cerchio dato, condurre una secante ACD tale che la porzione CD di essa, che è compresa fra il secondo punto C in cui essa taglia la circonferenza ed il punto D in cui essa taglia la tangente in B , sia uguale alla corda BC .

2. Se in un triangolo isoscele ABC , avente il vertice in A , si conducono le tre altezze AD , BE , CF , le quali s'incontrano in K , la retta DF sarà tangente alla circonferenza circoscritta al quadrilatero $AFKE$.

3. In un cerchio dato si inscrive un quadrato, in questo si inscrive un cerchio, in quest'ultimo un quadrato, e così di seguito. Dimostrare che le aree di questi cerchi formano una serie geometrica, e trovare la somma di questa serie.

4. Trovare due numeri, sapendo che la loro somma, il loro prodotto e la differenza dei loro quadrati sono tre numeri uguali.

(*R. Liceo di Pavia*).

1. Di un triangolo rettangolo si conosce l'area a^2 e il raggio r del cerchio inscritto. Calcolare i lati.

2. Costruire un triangolo, dato un angolo, l'altezza che parte dal suo vertice e una delle altre due.

(*R. Liceo di Pesaro*).

1. Data l'equazione:

$$\frac{\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a} - \sqrt{x-b}} = \sqrt{\frac{x-a}{x-b}}$$

calcolare, senza risolverla, la somma e la differenza delle terze potenze delle radici, e cercare di qual numero bisogna aumentare le radici affinché l'equazione che ha le medesime radici della data aumentate del detto numero, manchi del secondo termine.

2. Dimostrare algebricamente che l'area di un triangolo rettangolo eguaglia il semiperimetro moltiplicato per il semiperimetro diminuito dell'ipotenusa; e dedurre la risoluzione del problema seguente: Calcolare le lunghezze dei lati di un triangolo rettangolo conoscendo l'area ed il perimetro.

3. Costruire sopra una data base un triangolo isoscele che abbia gli angoli alla base doppi dell'angolo al vertice, e calcolare le altezze del detto triangolo in funzione della base data.

4. Per un punto situato nel piano di un angolo condurre una trasversale tale che il rettangolo dei segmenti di questa retta, intercetti tra il punto dato e i lati dell'angolo, sia equivalente ad un quadrato dato.

(*R. Liceo di Salerno*).

1. Se le basi e le altezze di due piramidi rette sono uguali, saranno rispettivamente uguali anche le facce laterali; e, se queste sono similmente disposte, saranno eguali anche le piramidi.

2. Dividere un dato segmento di retta in due parti tali che il quadrato di una sia il doppio del quadrato dell'altra.

3. Calcolare i lati d'un triangolo rettangolo conoscendo il perimetro p e l'area A .

4. Cercare le relazioni che devono sussistere fra i coefficienti A , B , C , D dell'equazione:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

perchè questa sia soddisfatta da tutte le terne di valori di x , y , z che verificano le equazioni

$$x = mz + a, y = nz + b.$$

(*R. Liceo di Senigallia*).

1. Dimostrare che la differenza dei quadrati descritti sopra due lati di un triangolo qualunque, è uguale alla differenza dei quadrati dei segmenti del terzo lato, determinati dalla perpendicolare abbassata su di esso dal vertice dell'angolo opposto.

2. Descrivere una circonferenza che passi per due punti dati ed abbia il centro in una retta data.

3. Il quadrato del maggiore di tre numeri interi consecutivi eguaglia la somma dei quadrati degli altri due numeri. Trovare i tre numeri.

4. Le differenze fra l'ipotenusa e i cateti di un triangolo rettangolo sono 3 e 6. Calcolare i lati.

(*R. Liceo di Taranto*).



SOLUZIONI DELLE QUISTIONI

$a)$, $c)$, 49, 51, 52, 56*, 57*, 58*, 59, 60, 61, 62* e 63*.

a). Se i raggi dei circoli inscritti nelle quattro facce d'un tetraedro sono fra loro eguali, è necessario che le facce stesse siano fra loro eguali?

(D. BESSO).

Soluzione del Prof. F. Palatini.

Siano due triangoli isosceli coi lati eguali misurati dal numero a , e siano b e b_1 le misure delle loro basi. Se i raggi dei circoli inscritti nei due trian-

goli sono eguali fra loro ha luogo l'eguaglianza

$$\frac{b^2 (2a - b)}{2a + b} = \frac{b_1^2 (2a - b_1)}{2a + b_1}$$

e reciprocamente.

Ora quest'eguaglianza non è soddisfatta soltanto da $b_1 = b$, ma anche, posto

$$b = 2ax \quad [1]$$

da

$$b_1 = a \frac{1 - x^2 + \sqrt{(1 - x^2)(1 - x^2 + 4x)}}{1 + x} \quad [2]$$

la quale quantità è sempre reale e positiva e minore di $2a$, per essere

$$0 < x < 1.$$

La condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza d'un tetraedro con uno spigolo eguale a b , lo spigolo opposto eguale a b_1 , e gli altri quattro spigoli eguali ad a , è data dalla disuguaglianza

$$b^2 + b_1^2 - 4a^2 < 0$$

la quale è soddisfatta dai valori [1], [2]. Da ciò si conclude l'esistenza d'un tetraedro nel quale sono eguali i cerchi inscritti nelle quattro facce, sebbene queste non siano fra loro eguali.

c). *Fra quali limiti devono essere compresi gli angoli di un triangolo affinché si possa costruire un triangolo colle distanze del centro del circolo circoscritto ai tre lati?*

Soluzione del Prof. F. Viaggi (*).

Sieno α , β , γ gli angoli di un triangolo ABC : suppongo α costante e variabili gli altri due, e inoltre $\beta > \gamma$. Le distanze del centro ai tre lati sono proporzionali a $\pm \cos \alpha$, $\pm \cos \beta$, $\cos \gamma$ (va scelto $-\cos \alpha$ o $-\cos \beta$, se α o β è ottuso). Chiamando s la somma delle distanze del centro dai lati AB , AC , e d la loro differenza, le condizioni affinché il problema sia possibile sono le seguenti: 1°, la distanza del centro dal lato BC sia minore di s ; 2°, sia maggiore di d .

In una circonferenza di raggio 1 prendo un segmento BMC capace dell'angolo α , e sia M il punto medio dell'arco; facendo percorrere ad A l'arco MB , avrò tutti i triangoli, a uno dei quali è uguale o simile un qualunque triangolo avente un angolo eguale ad α .

Sia $\alpha > 90^\circ$.

Mentre A va da M a B , la funzione

$$s = \cos \beta + \cos \gamma = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2}$$

(*) Altre soluzioni pervennero dal Prof. S. Gatti, F. Palatini.

decesce da $2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$ ad $1 - \cos \alpha$; e poichè è $-\cos \alpha < 1 - \cos \alpha$, la 1.^a condizione è sempre soddisfatta. La funzione

$$d = \cos \gamma - \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta - \gamma}{2}$$

cresce da 0 ad $1 + \cos \alpha$: perciò

$$\text{se } -\cos \alpha \geq 1 + \cos \alpha, \text{ ossia se } \alpha \geq 120^\circ,$$

anche la 2.^a condizione è soddisfatta, quindi il problema è possibile sempre;

$$\text{se } -\cos \alpha < 1 + \cos \alpha, \text{ ossia se } \alpha < 120^\circ,$$

esisterà una ed una sola posizione di A per cui sarà

$$-\cos \alpha = d$$

e per tutte le posizioni intermedie tra quella ed M sarà il problema possibile. Ora i valori di $\cos \gamma$ e $-\cos \beta$, che rispondono alla precedente equazione, sono le radici della quadratica

$$2(1 + \cos \alpha)x^2 + 2(1 + \cos \alpha)\cos \alpha \cdot x + (2\cos^2 \alpha - 1) = 0$$

le quali sono reali, perchè per ipotesi $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} < \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$, e di segni contrari; e quindi la positiva va presa per valore di $\cos \gamma$ e la negativa per quello di $-\cos \beta$; e le limitazioni, che cerchiamo, sono adunque le seguenti:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} &\leq \cos \gamma < \frac{1}{2} \left(-\cos \alpha + \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - 4 \operatorname{sen}^4 \frac{\alpha}{2}} \right) \\ \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} &\geq \cos \beta > \frac{1}{2} \left(\cos \alpha + \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - 4 \operatorname{sen}^4 \frac{\alpha}{2}} \right). \end{aligned}$$

Sia $\alpha = 90^\circ$.

Il problema è evidentemente impossibile.

Sia $\alpha < 90^\circ$.

In questa ipotesi prima ci occuperemo dei triangoli acutangoli e poi degli ottusangoli: cioè, se C_1 è il punto diametralmente opposto di C , facciamo per ora percorrere ad A l'arco MC_1 ; quindi C_1B .

Quando A va da M a C_1 , la funzione

$$s = \cos \beta + \cos \gamma$$

decesce da $2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$ a $\operatorname{sen} \alpha$; e la funzione

$$d = \cos \gamma - \cos \beta$$

cresce da 0 a $\operatorname{sen} \alpha$. Perciò

$$\text{se } \cos \alpha \geq \sqrt{3} - 1 \left(\text{conseguenza di } \cos \alpha \geq 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right),$$

$$\text{ossia } \alpha \leq 42^{\circ} 56' 29'', \dots$$

la 1^a condizione non è mai soddisfatta: il problema è impossibile

$$\text{se } \sqrt{3} - 1 > \cos \alpha > \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ ossia } 42^{\circ} \dots < \alpha < 45^{\circ},$$

la 2^a condizione è sempre soddisfatta; ed esisterà una e una sola posizione di A per cui sarà

$$\cos \alpha = s$$

e per tutte le posizioni intermedie tra quella ed M , sarà soddisfatta anche la 1^a condizione e quindi il problema sarà possibile: ora i valori di $\cos \gamma$ e $\cos \beta$ che risolvono la precedente equazione sono le radici della quadratica

$$2(1 - \cos \alpha) x^2 - 2(1 - \cos \alpha) \cos \alpha \cdot x + (2 \cos^2 \alpha - 1) = 0$$

le quali sono reali, perchè $\cos \frac{\alpha}{2} < \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ come conseguenza dell'ipotesi

$\cos \alpha < \sqrt{3} - 1$, e positive; e poichè $\cos \gamma > \cos \beta$, la minore delle radici dà il valore di $\cos \beta$, l'altra quello di $\cos \gamma$. Quindi la limitazione

$$\begin{aligned} \text{sen } \frac{\alpha}{2} &\leq \cos \gamma < \frac{1}{2} \left(\cos \alpha + \cotg \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - 4 \cos^4 \frac{\alpha}{2}} \right) \\ \text{sen } \frac{\alpha}{2} &\geq \cos \beta > \frac{1}{2} \left(\cos \alpha - \cotg \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - 4 \cos^4 \frac{\alpha}{2}} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Se } \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ ossia } \alpha = 45^{\circ},$$

sono verificate 1^a e 2^a condizione; dunque il problema è possibile sempre;

$$\text{se } \cos \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ ossia } \alpha > 45^{\circ},$$

la 1^a è sempre soddisfatta; ed esiste una ed una sola posizione di A per cui risulta

$$\cos \alpha = d$$

e per tutte le posizioni intermedie tra quella ed M è soddisfatta anche la 2^a e quindi il problema è possibile; ora i valori di $\cos \gamma$ e $-\cos \beta$ che risolvono la precedente equazione sono radici della

$$2(1 + \cos \alpha) x^2 - 2(1 + \cos \alpha) \cos \alpha \cdot x + (2 \cos^2 \alpha - 1) = 0$$

che ha radici reali, perchè per α acuto $\text{sen } \frac{\alpha}{2} < \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$, e di segni contrari. Quindi la limitazione

$$\text{sen } \frac{\alpha}{2} \leq \cos \gamma < \frac{1}{2} \left(\cos \alpha + \text{tang } \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - 4 \text{sen}^4 \frac{\alpha}{2}} \right)$$

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \geq \cos \beta > \frac{1}{2} \left(-\cos \alpha + \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - 4 \operatorname{sen}^4 \frac{\alpha}{2}} \right).$$

Occupiamoci ora dei triangoli ottusangoli.

Mentre A va da C_1 a B sull'arco $C_1 B$, la funzione

$$s = \cos \gamma - \cos \beta$$

cresce da $\operatorname{sen} \alpha$ ad $1 + \cos \alpha$; e la funzione

$$d = \cos \gamma + \cos \beta$$

decresce da $\operatorname{sen} \alpha$ ad $1 - \cos \alpha$: perciò

se
$$\cos \alpha > \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ ossia } \alpha < 45^\circ,$$

la 2ª condizione è soddisfatta, e per un'unica posizione di A sarà verificata la equazione

$$\cos \alpha = d$$

e per le posizioni intermedie tra quella e B sarà soddisfatta anche la 1ª, e quindi il problema sarà possibile. I valori di $\cos \gamma$ e $-\cos \beta$ sono radici di

$$2(1 + \cos \alpha)x^2 - 2(1 + \cos \alpha)\cos \alpha \cdot x - (2\cos^2 \alpha - 1) = 0$$

che ha radici reali e positive, e poichè $\cos \gamma > -\cos \beta$, essendo β ottuso, si hanno le limitazioni

$$1 > \cos \gamma > \frac{1}{2} \left(\cos \alpha + \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - 4 \operatorname{sen}^4 \frac{\alpha}{2}} \right) \\ -\cos \alpha < \cos \beta < -\frac{1}{2} \left(\cos \alpha - \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - 4 \operatorname{sen}^4 \frac{\alpha}{2}} \right).$$

Se
$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ ossia } \alpha = 45^\circ,$$

il problema è sempre possibile

se
$$\frac{1}{2} < \cos \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ ossia } 60^\circ > \alpha > 45^\circ,$$

la 1ª condizione è soddisfatta; e vi sarà una posizione di A per cui risulta

$$\cos \alpha = d$$

e per tutte le posizioni intermedie tra quella e B è verificata anche la 2ª; ma i valori di $\cos \gamma$ e $\cos \beta$ che soddisfano l'equazione sono le radici della quadratica

$$2(1 - \cos \alpha)x^2 - 2(1 - \cos \alpha)\cos \alpha \cdot x + (2\cos^2 \alpha - 1) = 0$$

che ha radici reali, perchè $\cos \frac{\alpha}{2} < \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ come conseguenza dell'ipotesi $\cos \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$, e di segni contrari. Quindi le limitazioni sono

$$1 > \cos \gamma > \frac{1}{2} \left(\cos \alpha + \cotg \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - 4 \cos^4 \frac{\alpha}{2}} \right) \\ - \cos \alpha < \cos \beta < -\frac{1}{2} \left(\cos \alpha - \cotg \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - 4 \cos^4 \frac{\alpha}{2}} \right)$$

se $\cos \alpha \leq \frac{1}{2}$, ossia $\alpha \geq 60^\circ$

la 2^a condizione non è mai soddisfatta e quindi il problema è impossibile.

Scolio. — Se con le distanze del centro del cerchio circoscritto ad un triangolo dai suoi lati si può costruire un triangolo, o i raggi dei cerchi ex-inscritti sono tutti maggiori del raggio del circoscritto o due sono minori e quindi il terzo maggiore, o reciprocamente; le distanze dei centri dei cerchi ex-inscritti da quello del circoscritto sono o tutte maggiori del lato del triangolo equilatero inscritto in questo, o due minori e l'altra maggiore, e reciprocamente.

49. Dimostrare che, quando n tende all'infinito, si ha

$$\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{2}} + \frac{1}{\sqrt[n]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right) = 2.$$

(D. BESSO).

Dimostrazione del Prof. L. Merante (*).

Dall'eguaglianza

$$\frac{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}}{a - b} = \frac{1}{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}},$$

nell'ipotesi $a > b$, segue

$$\frac{1}{2 \sqrt[n]{a}} < \frac{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}}{a - b} < \frac{1}{2 \sqrt[n]{b}},$$

e fatto $a = b + 1$, abbiamo

$$\frac{1}{2 \sqrt[n]{b+1}} < \sqrt[n]{b+1} - \sqrt[n]{b}, \quad [1]$$

$$\frac{1}{2 \sqrt[n]{b}} > \sqrt[n]{b+1} - \sqrt[n]{b}. \quad [2]$$

Facendo nella [1] $b = 0, 1, 2, \dots, n-1$ e sommando, e nella [2] $b = 1, 2, \dots, n$ e sommando, otteniamo la limitazione

(*) Altra dimostrazione pervenne dal Sig. Prof. F. Viaggi.

$$\sqrt[n+1]{1} - \sqrt[1]{1} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt[1]{1}} + \frac{1}{\sqrt[2]{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right) < \sqrt[n]{n}$$

ossia

$$0 < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt[1]{1}} + \frac{1}{\sqrt[2]{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right) + \sqrt[1]{1} - \sqrt[n+1]{1} \\ < \sqrt[n]{n} + \sqrt[1]{1} - \sqrt[n+1]{1}$$

e dividendo per $\frac{1}{2} \sqrt[n]{n}$

$$0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \left(\frac{1}{\sqrt[1]{1}} + \frac{1}{\sqrt[2]{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right) + \\ 2 \sqrt[\frac{1}{n}]{\frac{1}{n}} - 2 \sqrt[1+\frac{1}{n}]{1+\frac{1}{n}} < 2 + 2 \sqrt[\frac{1}{n}]{\frac{1}{n}} - 2 \sqrt[1+\frac{1}{n}]{1+\frac{1}{n}}.$$

Quando n tende all'infinito l'ultimo membro tende a zero, quindi

$$\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \left(\frac{1}{\sqrt[1]{1}} + \frac{1}{\sqrt[2]{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right) = 2.$$

51. Risolvere l'equazione

$$x^5 + 5ax^3 + 5a^2x + b = 0. \quad (D. Besso).$$

Soluzione del Prof. U. Scarpis (*).

Per maggiore semplicità nelle formule di soluzione mettiamo il termine noto sotto la forma $2b$: facendo quindi $x = \alpha + \beta$ si ottiene, come è facile verificare, l'equazione:

$$\alpha^5 + \beta^5 + (\alpha\beta + a)(5\alpha^3 + 10\alpha^2\beta + 10\alpha\beta^2 + 5a\alpha + 5a\beta + 5\beta^3) + 2b = 0$$

la quale sarà soddisfatta qualora si faccia:

$$\alpha^5 + \beta^5 = -2b \quad \alpha \cdot \beta = -a,$$

dalle quali si ricava:

$$\alpha = \sqrt[5]{-b + \sqrt[5]{b^2 + a^5}}, \quad \beta = \sqrt[5]{-b - \sqrt[5]{b^2 + a^5}}.$$

Indicando ora con α, β le radici quinte aritmetiche delle quantità

$$-b + \sqrt[5]{b^2 + a^5}, \quad -b - \sqrt[5]{b^2 + a^5},$$

e con ω una radice quinta propria dell'unità, le radici dell'equazione proposta saranno:

$$\alpha + \beta, \alpha\omega + \beta\omega^4, \alpha\omega^2 + \beta\omega^3, \alpha\omega^3 + \beta\omega^2, \alpha\omega^4 + \beta\omega.$$

(*) Altre soluzioni furono inviate dal Prof. G. Russo, F. Viaggi.

Se $b^2 + a^5 > 0$, l'equazione ha una radice reale e quattro complesse coniugate.

Se $b^2 + a^5 = 0$, ponendo $b = -c^5$, $a = -c^2$, si ha:

$$x^5 - 5c^2 x^3 + 5c^4 x - 2c^5 = 0$$

ed essendo il primo membro decomponibile nei fattori $(x - 2c)$, $(x^2 + cx - c^2)^2$, si vede subito che le radici sono tutte reali e che due di esse sono doppie.

Se $b^2 + a^5 < 0$ sarà pure $a < 0$ e ponendo

$$a = -c, \quad -b \pm \sqrt{b^2 - c^5} = -b \pm i\sqrt{c^5 - b^2} = \rho (\cos \gamma \pm i \sin \gamma),$$

da cui:

$$\rho^2 = c^5, \quad \cos \gamma = -\frac{b}{\rho} = -\frac{b}{c^{\frac{5}{2}}},$$

si ha:

$$\alpha = \sqrt[5]{\rho (\cos \gamma + i \sin \gamma)} = c^{\frac{1}{2}} \cos \left(\frac{\gamma + 2k\pi}{5} \right) + i c^{\frac{1}{2}} \sin \left(\frac{\gamma + 2k\pi}{5} \right)$$

$$\beta = \sqrt[5]{\rho (\cos \gamma - i \sin \gamma)} = c^{\frac{1}{2}} \cos \left(\frac{\gamma + 2k\pi}{5} \right) - i c^{\frac{1}{2}} \sin \left(\frac{\gamma + 2k\pi}{5} \right)$$

e quindi in fine:

$$\alpha + \beta = 2c^{\frac{1}{2}} \cos \left(\frac{\gamma + 2k\pi}{5} \right).$$

Dando ora a k successivamente i valori 0, 1, 2, 3, 4 si ottengono cinque valori differenti di $\alpha + \beta$ i quali soddisfanno l'equazione proposta, e siccome essa è del quinto grado, saranno le radici cercate. Le formule che somministrano le dette radici sono le seguenti:

$$2c^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\gamma}{5}, \quad 2c^{\frac{1}{2}} \cos \left(\frac{\gamma + 2\pi}{5} \right), \quad 2c^{\frac{1}{2}} \cos \left(\frac{\gamma + 4\pi}{5} \right), \quad 2c^{\frac{1}{2}} \cos \left(\frac{\gamma + 6\pi}{5} \right)$$

$$2c^{\frac{1}{2}} \cos \left(\frac{\gamma + 8\pi}{5} \right),$$

dalle quali si deduce che anche in questo caso sono tutte reali.

52. Risolvere l'equazione

$$x^7 + 7ax^5 + 14a^2x^3 + 7a^3x + b = 0. \quad (\text{D. BESSO}).$$

Soluzione del Prof. U. Scarpis (*).

Ponendo egualmente il termine noto sotto la forma $2b$ e facendo $x = \alpha + \beta$, si ottiene l'equazione:

$$\alpha^7 + \beta^7 + 2b + 7(\alpha\beta + a)(\alpha^5 + 3\alpha^4\beta + 5\alpha^3\beta^2 + 5\alpha^2\beta^3 + 3\alpha\beta^4 + \beta^5) +$$

$$7(\alpha\beta + a) \left\{ a(2\alpha^3 + 5\alpha\beta^2 + 5\alpha^2\beta + 2\beta^3) + a^2(\alpha + \beta) \right\} = 0$$

(*) Altre soluzioni furono inviate dal Prof. G. Russo, F. Viaggi.

che sarà soddisfatta qualora si abbia:

$$\alpha^7 + \beta^7 = -2b, \quad \alpha\beta = -a,$$

dalle quali si ricava:

$$\alpha = \sqrt[7]{-b + \sqrt{b^2 + a^7}} \quad \beta = \sqrt[7]{-b - \sqrt{b^2 + a^7}}.$$

Limitando ora il significato di α, β al solo valore aritmetico delle precedenti radici settime ed indicando con ω una radice settima propria dell'unità, si scorge che le radici dell'equazione proposta si possono ottenere dall'espressione:

$$\alpha \cdot \omega^\mu + \beta \omega^\nu$$

dando a μ e ν tutti quei valori interi e positivi che soddisfano la relazione: $\mu + \nu = 7$.

La completa analogia con la questione precedente rende superflua la discussione delle formole di soluzione.

56°. *Dimostrare che, indicando con A, B, C, D quattro vertici consecutivi d'un poligono regolare, si ha*

$$\overline{AC^2} = AB \times (AB + AD). \quad (D. \text{ Besso}).$$

Dimostrazione del Sig. *G. Scarpini*, allievo dell'Istituto tecnico di Catanzaro.

Sul prolungamento della CB si abbassi da A la perpendicolare AE ; allora, dal triangolo ABC ottusangolo in B , si ha:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \times BE,$$

ma si sa che $BC = AB$ ed è facile vedere che

$$BE = \frac{1}{2} (AD - AB),$$

quindi la precedente relazione diviene:

$$AC^2 = 2AB^2 + AB(AD - AB) = AB^2 + AB \times AD = AB(AB + AD).$$

Dimostrazione del Sig. *G. Marcantoni*, allievo del R. Liceo di Modena.

Siano A, B, C, D (Fig. 6) i quattro vertici consecutivi di un poligono regolare. Si unisca B con D , e, prolungato AD in E , per modo che sia $DE \equiv AB$, si unisca C con E .

Considerando ora i due triangoli ABC, BCD , si vede che questi sono uguali ed isosceli. Sarà quindi $\text{ang. } BAC \equiv CDB$.

Parimenti si può dimostrare facilmente che sono uguali i due triangoli ABD e ACD . E che è $\text{ang. } BDA \equiv CAD$.

Sarà, per conseguenza, anche l'intero $\text{ang. } BAD \equiv$ all'intero $\text{ang. } CDA$.

Ora si osservi che nel quadrilatero $ABCD$, gli angoli sono a due a due

uguali. E siccome fra tutti e quattro devono essere uguali a quattro retti, due di essi, presi dalle due coppie di angoli uguali, devono sommare due retti. Cioè sarà: ang. $BAD + ABC \equiv 2$ retti.

Le rette BC , AD devono dunque essere parallele; e l'angolo BCA deve essere uguale all'angolo CAD e l'angolo $CDE \equiv BCD$. Si dimostra quindi facilmente che i due triangoli ABC , CDE sono uguali ed isosceli, e che è ang. $CED \equiv BCA$ ed anche che è: ang. $CED \equiv CAE$.

Da tutto questo si ricava che il triangolo ACE è isoscele ed ha gli angoli alla base uguali agli angoli alla base del triangolo isoscele ABC ; e che quindi i due triangoli sono simili.

Sussisterà quindi la proporzione:

$$AB : AC = AC : AE \text{ ossia } AB : AC = AC : (AD + DE).$$

Ma $DE \equiv AB$. Quindi $AB : AC = AC : (AD + AB)$.

Ed essendo il prodotto dei medi uguale a quello degli estremi, si ricava

$$\overline{AC}^2 \equiv AB (AD + AB).$$

c. d. d.

Dimostrazione del Sig. *P. Marano* studente a Catania (*).

Tiro dai punti B e C le perpendicolari BE e CF sulla AD . Applicando al triangolo rettangolo ACF il teorema di Pitagora, si ha:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{CF}^2.$$

Sostituendo in questa eguaglianza ad $\overline{AF}^2$ il suo equivalente $(AE + EF)^2$, sviluppando e riducendo, si ottiene:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AE}^2 + 2AE \times AB = AB (AB + AE + 2AE).$$

E siccome $AE = DF$, sarà $AB + 2AE = AD$.

Sostituendo risulta:

$$\overline{AC}^2 = AB \times (AB + AD) \text{ c. d. d.}$$

Osservazione. — La relazione data si può dimostrare immediatamente applicando il teorema di Tolomeo al quadrilatero iscrittibile $ABCD$, poichè essa può scriversi:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + AB \times AD.$$

(*) I Sigg. *G. Alessio*, *G. Bilonti*, *L. Isola*, *S. Martucci*, *P. Tallarico* (Istituto tecnico Catanzaro), *A. Colomi* (R. Liceo Parini Milano), *A. Gracioti* (Scuola tecnica Osimo), *A. Longo* (R. Liceo Acireale), *M. Righetto* (Istituto tecnico Spezia), *P. Rizzuti* (R. Liceo Catanzaro), *E. Segrè* (R. Liceo Modena), *G. D'Asdia* (R. Istituto tecnico Girgenti), *C. Aiello* (R. Liceo V. E. Napoli), *A. Baldassarre* (R. Istituto tecnico Bari), *G. M. Nobile* (R. Istituto tecnico Chieti), hanno dimostrato che il teorema proposto è un corollario di quello di Tolomeo sul quadrangolo inscritto.

Altre dimostrazioni sono pervenute dal Sig. *A. Sidoti* (R. Istituto tecnico Reggio Emilia), *P. Patrassi* (R. Istituto tecnico Terni), *G. Candido* (R. Liceo Lecce), *E. Gabrielli* (R. Scuola tecnica Velletri), *S. Lopriore* (R. Liceo Bari), *R. Salvadori* e *G. Prinzi* (R. Istituto tecnico Roma).

Si può notare che la condizione che i punti A, B, C, D siano vertici consecutivi d'un poligono regolare non è necessaria; basterà che i detti punti siano situati sopra una stessa circonferenza di circolo e che sia $AB = BC = CD$.

57°. *Dimostrare che, se un triedro ha un diedro retto, la somma dei coseni dei tre angoli piani non può essere uguale a -1 .* (D. BESSO).

Dimostrazione del Sig. *G. Michele Nobile*, allievo del R. Istituto tecnico di Chieti (*).

Chiamando con a, b, c le misure dei tre angoli piani, il primo opposto e gli altri due adiacenti al diedro retto, dalla trigonometria sferica si ha la formola:

$$\cos a = \cos b \cos c;$$

dalla quale:

$$\cos a + \cos b + \cos c + 1 = (1 + \cos b)(1 + \cos c) = 4 \cos^2 \frac{b}{2} \cos^2 \frac{c}{2};$$

quindi

$$\cos a + \cos b + \cos c + 1 > 0.$$

Il che dimostra il teorema.

58°. *Un tronco di piramide, in cui il perimetro della base maggiore è doppio di quello della base minore, è diviso in due parti equivalenti con un piano parallelo alle basi; calcolare a meno di $\frac{1}{10000}$ il rapporto delle distanze del piano secante dalle due basi.* (D. BESSO).

Soluzione del Sig. *O. Manfredi*, allievo del R. Istituto tecnico di Reggio Emilia (**).

Prolungando le facce laterali del tronco otteniamo un angoloide di vertice V . Le basi b, B del tronco sono sezioni fatte in questo angoloide da piani paralleli, ed essendo il perimetro della base B doppio di quello della base b , la distanza della base B dal vertice sarà doppia di quella della base b , cioè quest'ultima distanza sarà uguale all'altezza del tronco che chiameremo h .

I volumi delle piramidi staccate in un angoloide da piani paralleli stanno fra di loro come i cubi delle distanze di questi piani dal vertice. Se dunque b' è la sezione parallela alle basi, che ci si propone di condurre, la piramide di base B starà a quella di base b come $8:1$, e siccome il solido fra B e b' deve

(*) Dimostrazioni simili a questa hanno inviato i Sigg. *R. Cassoli* (R. Liceo Reggio Emilia), *R. Salvadori* e *G. Prinzi* (R. Istituto tecnico Roma), *G. A. Venturi*, *O. Manfredi* (R. Istituto tecnico Reggio Emilia). Altre dimostrazioni sono pervenute dal Sigg. *G. D'Asdia* (R. Istituto tecnico Girgenti), *S. Lopriore* (R. Liceo Bari).

(**) Altre soluzioni sono pervenute dal Sigg. *A. Baldassarre* (R. Istituto tecnico Bari), *G. Biontoni* (Istituto tecnico Catanzaro), *G. D'Asdia* (R. Istituto tecnico Girgenti), *G. M. Nobile* (R. Istituto tecnico Chieti), *S. Lopriore* (R. Liceo Bari), *R. Salvadori* e *G. Prinzi* (R. Istituto tecnico Roma).

essere equivalente al solido fra b e b' , il rapporto fra la piramide di base b' e la piramide di base b sarà eguale a $1 + \frac{7}{2}$: 1 cioè a 9:2.

Se x, y sono le distanze del piano secante dalle basi B e b rispettivamente, saranno $h + y$ ed h le distanze delle basi b' e b dal vertice V , quindi il precedente rapporto fra le due piramidi di basi b' e b sarà espresso anche da: $\left(\frac{h+y}{h}\right)^3 = \left(1 + \frac{y}{h}\right)^3$. Avremo dunque: $\left(1 + \frac{y}{h}\right)^3 = \frac{9}{2}$, da cui:
 $\frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{9}{2}} - 1 = 0,6509$ a meno di $\frac{1}{10000}$ per difetto.

Se si vuole determinare il rapporto $\frac{x}{y}$ delle distanze del piano secante b' dalle basi B e b , basterà ricordare che essendo $h = x + y$, si ha $\frac{y}{x+y} = \sqrt[3]{\frac{9}{2}} - 1$, da cui:

$$\frac{x+y}{y} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{2}} - 1}.$$

Ma si ha identicamente

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{2}} - 1} = \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{9}{2}}\right)^2 + \sqrt[3]{\frac{9}{2}} + 1}{\frac{9}{2} - 1} = \frac{\sqrt[3]{162} + \sqrt[3]{36} + 2}{7}.$$

Quindi, sostituendo e semplificando

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt[3]{162} + \sqrt[3]{36} - 5}{7} = 0,5361 \text{ a meno di } \frac{1}{10000} \text{ per difetto.}$$

59. Dimostrare che il rapporto del raggio del circolo inscritto ad un ettagono regolare al raggio del circolo circoscritto soddisfa alla equazione

$$8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0. \quad (\text{D. BESSO}).$$

Dimostrazione del Sig. Prof. S. Catania.

Sieno A, B, C, D (Fig. 7) quattro vertici consecutivi dell'ettagono. Si prolunghi AB dalla parte di B fino in H e K , in modo che sieno $BH = AB$, $AK = AD$. La retta DC prolungata tagli AH in un punto I , e la retta KC tagli AD in un punto P . Siccome l'ang. $BAC = \frac{1}{7}$ di 2 retti, e l'ang. $ACD = \frac{4}{7}$ di 2 retti, gli angoli ACI, AIC saranno ciascuno i $\frac{3}{7}$ di 2

retti, e perciò sarà $AI = AC$. Inoltre è manifestamente la retta AC bisettrice dell'angolo PCI , e quindi, condotta la retta CH , siccome l'angolo ACH risulterà retto, perchè $AB = BH = BC$, sarà CH bisettrice dell'angolo supplementare ICK . Così il fascio delle quattro rette $C (AHIK)$ è armonico, ed armonico sarà eziandio il gruppo $AHIK$; da cui segue che

$$\frac{2}{AH} = \frac{1}{AI} + \frac{1}{AK},$$

ovvero

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}. \quad [1]$$

Sieno y, z, u i numeri che misurano AB, AC, AD rispettivamente, ed x il rapporto fra il raggio del circolo iscritto all'ottagono e il raggio del circolo circoscritto. Si avrà immediatamente

$$x = \cos \frac{\pi}{7}$$

$$z = 2y \cos \frac{\pi}{7} = 2yx; \quad z^2 = y^2 + yu = 4y^2x^2.$$

La [1] allora può scriversi

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2yx} + \frac{1}{u} = \frac{1}{2yx} + \frac{1}{4yx^2 - y}.$$

Moltiplicando per y e togliendo i fratti, si avrà

$$8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

che è quanto volevasi dimostrare.

Osservazione. Si può verificare che il rapporto del raggio del circolo iscritto nell'ottagono regolare di seconda specie al raggio del circolo circoscritto, preso, questo rapporto, col segno negativo, soddisfa alla equazione precedente, e che vi soddisfa pure il rapporto analogo relativo all'ottagono regolare di terza specie.

Pertanto le radici della detta equazione sono $\cos \frac{\pi}{7}$, $-\cos \frac{2\pi}{7}$, $\cos \frac{3\pi}{7}$. E allora hanno luogo, fra le altre, le seguenti identità:

$$\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}; \quad \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{8}.$$

Dimostrazione dei Sigg. Prof. *F. Viaggi* e *M. Misani* (*).

L'identità goniometrica

$$64 \cos^7 a - 112 \cos^5 a + 56 \cos^3 a - 7 \cos a - \cos 7a = 0,$$

(*) Altre soluzioni della quistione sono pervenute dai Sigg. Prof. *L. Carlini*, *S. Gatti*, *G. Riboni* e *G. Russo*.

mostra che le radici della equazione

$$64 x^7 - 112 x^5 + 56 x^3 - 7 x + 1 = 0 \quad [\alpha]$$

sono comprese nella formola

$$x = \cos \frac{(2k+1)\pi}{7}$$

nella quale a k si attribuiscono successivamente 7 valori interi consecutivi, per esempio, da -3 a $+3$. Esaminando queste radici, si trova che una di esse, $\cos \pi = -1$, è semplice, e tre, $\cos \frac{\pi}{7}$, $\cos \frac{3\pi}{7}$, $\cos \frac{5\pi}{7} = -\cos \frac{2\pi}{7}$, sono doppie; dunque il primo membro della $[\alpha]$ è il prodotto di $x+1$ per il quadrato d'un polinomio del 3° grado, il qual polinomio trovasi essere $8x^3 - 4x^2 - 4x + 1$.

Le radici della equazione

$$8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

sono adunque $\cos \frac{\pi}{7}$, $-\cos \frac{2\pi}{7}$, $\cos \frac{3\pi}{7}$, che esprimono (la seconda cambiata di segno) i rapporti tra l'apotema e il raggio d'un ettagono regolare convesso o stellato.

60. *Dimostrare che la somma dei quadrati delle distanze d'un punto qualunque d'una superficie sferica dai quattro vertici d'un tetraedro a facce eguali, in essa inscritto, è uguale ad otto volte il quadrato del raggio.*

(D. Besso).

Dimostrazione del Sig. Prof. M. Misani.

Converrà approfittare di alcune proprietà del tetraedro a facce eguali già esposte dal Prof. Besso nel volume primo di questo Periodico.

Se S, A, B, C sono i quattro vertici di un tal tetraedro e G è il suo centro di gravità, questo punto coincide col centro della sfera circoscritta (V. teorema 12 dello scritto citato del Prof. Besso), di più in esso si bisecano le congiungenti i punti medi delle coppie di spigoli opposti; perchè è facile dimostrare che, per essere ciascuna di queste congiungenti perpendicolare a due spigoli opposti (V. teorema 16 l. c.), i loro punti di mezzo coincidono con quello che dista egualmente dai quattro vertici, cioè col punto G .

Ciò posto, chiamando con a, b, c gli spigoli BC, AC, AB , che sono rispettivamente eguali ai loro opposti (V. teorema 3 l. c.) con d_a, d_b, d_c, d_s , le distanze di un punto qualunque D della superficie sferica circoscritta al tetraedro dai predetti vertici e con M, M_1 i punti di mezzo dei due spigoli opposti SA e BC ; dai triangoli DSA, DCB , per un notissimo teorema di geometria, si avrà

$$d_a^2 + d_s^2 = \frac{1}{2} a^2 + 2 DM^2$$

$$d_b^2 + d_c^2 = \frac{1}{2} a^2 + 2 D M_1^2$$

e sommando

$$d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 + d_s^2 = a^2 + 2 (D M^2 + D M_1^2),$$

ma nel triangolo $D M M_1$, per lo stesso teorema, si ha

$$D M^2 + D M_1^2 = \frac{1}{2} M M_1^2 + 2 D G^2,$$

dunque

$$d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 + d_s^2 = a^2 + M M_1^2 + 4 D G^2.$$

Ora dal triangolo rettangolo $S M M_1$ e dal triangolo $S B C$, si ricava

$$M M_1^2 + \frac{1}{4} a^2 = S M_1^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{1}{4} a^2,$$

dalla quale

$$M M_1^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$$

e perciò

$$d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 + d_s^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 4 D G^2;$$

ma (V. teorema 14 l. c.)

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8 D G^2,$$

dunque

$$d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 + d_s^2 = 8 D G^2,$$

la quale è l'espressione del teorema enunciato.

Una dimostrazione simile a questa è stata inviata dal Sig. Prof. *G. Riboni*, il quale vi aggiunge la seguente:

Osservazione. — Se s'indicano rispettivamente con x, a, b, c, d le rette $O M, O A, O B, O C, O D$, (*) dai triangoli $M O A, M O B, M O C, M O D$ si ha:

$$\begin{aligned} \overline{M A}^2 &= 2 R^2 (1 - \cos x a), & \overline{M B}^2 &= 2 R^2 (1 - \cos x b), \\ \overline{M C}^2 &= 2 R^2 (1 - \cos x c), & \overline{M D}^2 &= 2 R^2 (1 - \cos x d), \end{aligned}$$

da cui addizionando

$$\begin{aligned} \overline{M A}^2 + \overline{M B}^2 + \overline{M C}^2 + \overline{M D}^2 &= 8 R^2 - \\ &2 R^2 (\cos x a + \cos x b + \cos x c + \cos x d), \end{aligned}$$

(*) Le lettere A, B, C, D, O, M indicano rispettivamente i quattro vertici del tetraedro, il centro della sfera circoscritta e un punto qualunque della superficie sferica.

perciò in causa della relazione dimostrata risulta:

$$\cos x a + \cos x b + \cos x c + \cos x d = 0$$

e perciò i raggi OA , OB , OC , OD sono equipollenti ai lati d'un quadrangolo equilatero gobbo.

Dimostrazione del Sig. Prof. *F. Viaggi*.

Sia $ABCD$ un tetraedro, S il suo baricentro, O un punto qualunque ed A' , B' , C' , D' le proiezioni di A , B , C , D sulla retta OS ; per la nota proprietà del baricentro è

$$SA' + SB' + SC' + SD' = 0. \quad [\alpha]$$

Dai triangoli OSA , OSB , ... si deducono le uguaglianze

$$\overline{OA}^2 = \overline{OS}^2 + \overline{SA}^2 + 2 OS \cdot SA',$$

e analoghe; dalle quali sommando membro a membro e tenendo presente la $[\alpha]$, si deduce

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 = 4 \overline{OS}^2 + \overline{SA}^2 + \overline{SB}^2 + \overline{SC}^2 + \overline{SD}^2.$$

(Cf. Baltzer — Stereom. § 11, 7).

Se il tetraedro è a facce eguali, il baricentro coincide col centro della sfera circoscritta (cf. la memoria del Besso sul *Tetraedro a facce uguali* stampata in questo Periodico, Anno I, Fasc. I, n. 12); quindi se O è sulla superficie della sfera il secondo membro dell'ultima eguaglianza si trasforma nell'ottuplo del quadrato del raggio.

Dimostrazione del Sig. Prof. *G. Russo*.

È facile vedere che in ogni tetraedro a facce eguali, le rette che congiungono i punti medi delle costole opposte (mediane) sono bisecate dal centro della sfera ad esso circoscritta. Premesso ciò, indichiamo con a , b , c i lati di una faccia, con R il raggio della sfera circoscritta, con l , m , n le lunghezze delle mediane, con α , β , γ , δ le distanze d'un punto della superficie della sfera dai quattro vertici del tetraedro; con A_1 , A_2 ; B_1 , B_2 ; C_1 , C_2 rispettivamente le le distanze dello stesso punto dai punti medi delle coppie di costole opposte. Allora pel teorema delle mediane si ha:

$$A_1^2 + A_2^2 = 2 R^2 + \frac{1}{2} l^2,$$

$$B_1^2 + B_2^2 = 2 R^2 + \frac{1}{2} m^2,$$

$$C_1^2 + C_2^2 = 2 R^2 + \frac{1}{2} n^2,$$

sommando

$$A_1^2 + A_2^2 + B_1^2 + B_2^2 + C_1^2 + C_2^2 = 6 R^2 + \frac{1}{2} (l^2 + m^2 + n^2),$$

ma è noto che

$$l^2 + m^2 + n^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = 4 R^2, \quad [1]$$

quindi

$$A_1^2 + A_2^2 + B_1^2 + B_2^2 + C_1^2 + C_2^2 = 8 R^2. \quad [2]$$

Inoltre

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2 C_1^2 + \frac{1}{2} c^2; \quad \beta^2 + \gamma^2 = 2 A_1^2 + \frac{1}{2} a^2;$$

$$\gamma^2 + \alpha^2 = 2 B_1^2 + \frac{1}{2} b^2; \quad \alpha^2 + \delta^2 = 2 A_2^2 + \frac{1}{2} a^2;$$

$$\beta^2 + \delta^2 = 2 B_2^2 + \frac{1}{2} b^2; \quad \gamma^2 + \delta^2 = 2 C_2^2 + \frac{1}{2} c^2;$$

sommando

$$3 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = 2 (A_1^2 + A_2^2 + B_1^2 + B_2^2 + C_1^2 + C_2^2) + (a^2 + b^2 + c^2);$$

e per le [1] e [2]

$$3 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = 24 R^2,$$

ossia

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 8 R^2.$$

c. b. d.

Osservazione. Il teorema potrebbe essere generalizzato così:

Dimostrare che la somma dei quadrati delle distanze d'un punto qualunque dello spazio dei quattro vertici d'un tetraedro a facce eguali, è uguale $4 (d^2 + R^2)$; in cui d indica la distanza del punto dal centro della sfera circoscritta al tetraedro.

61. *Fra quali limiti deve variare l'angolo acuto α , acciocchè l'angolo β , legato ad α dalla seguente relazione*

$$\frac{\sqrt{2} + 1 + (\sqrt{2} + 1) \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{2} - 1 + (\sqrt{2} - 1) \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta},$$

sia pur esso acuto?

(S. GATTI).

Soluzione del Prof. F. Viaggi.

Tenendo presente che

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1, \quad \operatorname{cotg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} + 1,$$

la relazione proposta dà luogo alla seguente

$$\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \alpha \right) \operatorname{tg}^2 \beta - \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha \right) \operatorname{tg} \beta + \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \alpha \right) \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0. [1]$$

La quale fornisce per $\operatorname{tg} \beta$ due valori reali: infatti la condizione di realtà delle

radici della [1] è

$$\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} \operatorname{tg}^2 \alpha\right)^2 - 4 \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \alpha\right)^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \operatorname{tg} \alpha \geq 0$$

ossia

$$\left(1 - \operatorname{tg}^4 \frac{\pi}{8}\right) \left(1 - \operatorname{tg}^4 \alpha\right) + \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \alpha\right)^4 \geq 0; \quad [2]$$

ora, posto $f(x) = \left(1 - \operatorname{tg}^4 \frac{\pi}{8}\right) \left(1 - x^4\right) + \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - x\right)^4$, è $f'(x) \geq 0$ se-

condo che è $x \geq x_1 = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \sqrt{1 - \operatorname{tg}^4 \frac{\pi}{8}}}$, perciò, facendo variare x da

$-\infty$ a $+\infty$, $f(x)$ decresce sino a $f(x_1)$ e quindi cresce, e poichè questo valore minimo $f(x_1)$ che essa assume è positivo, così $f(x)$ è sempre positiva, ossia la [2] è sempre soddisfatta (come disuguaglianza e mai come eguaglianza).

Le radici di [1] saranno positive, quando $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \alpha$ e $1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \cdot \operatorname{tg} \alpha$ avranno lo stesso segno, ossia, poichè α è positivo e minore di $\frac{\pi}{2}$, quando

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{8} \quad \text{oppure} \quad \frac{3\pi}{8} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

E queste sono le limitazioni domandate.

62°. Essendo a e b numeri interi primi con 30, dimostrare che l'espressione

$$a^8 + a^6 b^2 - a^2 b^6 - b^8$$

rappresenta un numero multiplo di 720.

(S. GATTI).

Dimostrazione di *G. M. Nobile*, alunno del R. Istituto tecnico di Chieti (*).

Basterà dimostrare che tale espressione è divisibile per 16, per 9 e per 5.

Poichè i numeri a e b sono dispari, i numeri $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a-b}{2}$ sono interi, ed avendo questi per somma il numero dispari a , uno di essi è pari; onde $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ è multiplo di 8; sicchè il prodotto

$$(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)(a^4 + a^2 b^2 + b^4) \dots [\alpha]$$

equivalente alla espressione proposta, ha il primo fattore divisibile per 8, ed il secondo per 2; è quindi divisibile per 16.

a , b divisi per 3 danno per resto 1 o 2; perciò a^2 , b^2 , a^4 , b^4 danno, divisi per 3, il resto 1; e quindi primo e terzo fattore del prodotto $[\alpha]$ sono divisibili per 3, e tutto il prodotto è divisibile per 9. Col metodo analogo a quello tenuto

(*) Altre soluzioni pervennero dai Sigg. *A. Baldassarre* (R. Istituto tecnico Bari), *G. D'Asdia* (R. Istituto tecnico Girgenti), *O. Manfredi* (R. Istituto tecnico Reggio Emilia).

testè si dimostra che $a^4 - b^4$ è divisibile per 5; oppure col teorema di Fermat, osservando che a^4 e b^4 divisi per 5 danno per resto 1; dunque il prodotto dei due primi fattori di $[\alpha]$ è divisibile per 5.

Osservazione. — Poichè l'espressione proposta si può scrivere anche sotto la forma $(a^2 + b^2)(a^6 - b^6)$, si può dire anche che: « essendo a, b interi primi con 2, 3, 5, 7 l'espressione $a^8 + a^5 b^3 - a^2 b^5 - b^8$ rappresenta un multiplo di 5040 ».

63°. *Costruire un triangolo dato un lato, l'altezza relativa a questo lato e la bisettrice dell'angolo opposto.*

Soluzione del Sig. P. Marano studente a Catania (*).

Sia ADE un triangolo rettangolo di cui il cateto AE sia eguale alla data altezza e l'ipotenusa AD alla data bisettrice. Si tiri da A la perpendicolare ad AD , finchè incontri in F la DE prolungata, e si divida DF per metà in O . Si costruisca l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo di cui un cateto sia OD e l'altro la metà del lato dato (BC), e fatto centro in O e raggio quest'ipotenusa, si segni nella ED dalla parte di D , un punto X , a partire dal quale si segneranno da una parte e dall'altra due punti B e C in modo che sia $XB = XC =$ metà del lato dato; sarà ABC il triangolo richiesto.

Infatti:

$$\overline{OD}^2 = \overline{OX}^2 - \frac{\overline{BC}^2}{4} - \left(OX + \frac{BC}{2} \right) \left(OX - \frac{BC}{2} \right) = OB \times OC.$$

Questa relazione prova (AMIOT, *Geom. elem.*, 25ª ristampa, pag. 87) che i punti $BCDF$ sono armonici, e quindi le quattro rette AB, AC, AD, AF sono pure armoniche. Ma i raggi coniugati AD ed AF sono perpendicolari fra loro, quindi esse bisecano gli angoli supplementari formati da' lati AB, AC (AMIOT, luogo citato, pag. 89).

Osservazione. — Se Y è il simmetrico di X rispetto ad O , e si segnano a partire da O , su XY , i punti B', C' in modo che $B'Y = YC'$, il triangolo $AB'C'$ avrà l'altezza data, la base data, e per bisettrice dell'angolo esterno opposto a questa base la bisettrice data.

Soluzione di G. M. Nobile, alunno del R. Istituto tecnico di Chieti (**).

Siano a, h, α il lato, l'altezza e la bisettrice dati. Se $h = \alpha$, il triangolo domandato è isoscele; e conoscendone base ed altezza agevolmente si costruisce. Se $h < \alpha$, costruisco un triangolo AHD rettangolo in H , il cui cateto AH e l'ipotenusa AD siano rispettivamente eguali ad h ed α ; del segmento AH costruisco il simmetrico AE rispetto ad AD , e conduco AF perpendicolare ad AE ; se F si prende rispetto ad AE dalla stessa banda di D , è l'angolo DAF minore di EAF , perciò acuto; ed essendo acuto anche HDA , le di-

(*) Soluzioni analoghe alla presente pervennero dai Sigg. E. Gott e G. Paoli (R. Istituto tecnico Arezzo), G. Prina e R. Salvadori (R. Istituto tecnico di Roma), A. Sidoli (R. Istituto tecnico Reggio Emilia).

(**) Una soluzione sostanzialmente analoga alla presente venne inviata dall'alunno P. P. Rizzuti (Istituto tecnico Catanzaro).

rezioni AF , DH s'incontrano in un punto F . Costruisco la circonferenza di diametro a tangente in A ad AF ; e sia MN il diametro che prolungato passi per F . Sulla FD a partire da F nella direzione FD (o nella opposta) stacco due segmenti FB , FC (FB' , FC') rispettivamente eguali ad FM , FN . Io dico che i triangoli ABC , $A'B'C'$ sono quelli domandati.

Infatti questi due triangoli hanno evidentemente i lati BC , $B'C'$ eguali ad a e le altezze corrispondenti eguali ad h ; rimane dunque a dimostrare che le bisettrici degli angoli opposti sono eguali ad α .

E in vero, essendo FMN , FA trasversale e tangente d'uno stesso cerchio, FA è media geometrica tra FM , FN e quindi tra FB , FC e tra FB' , FC' ; perciò i cerchi ABC , $A'B'C'$ risultano tangenti in A ad FA , ed hanno quindi i centri sulla retta indefinita AE , il primo sulla direzione AE e l'altro sull'opposta; e, tenendo presente che la bisettrice interna (o esterna) d'un angolo d'un triangolo è bisettrice interna (o esterna) dell'angolo formato dall'altezza e dal diametro del cerchio circoscritto condotto per lo stesso vertice, si conchiude che la bisettrice interna dell'angolo in A del triangolo ABC , o la esterna del triangolo $A'B'C'$, è AD e quindi eguale ad α (*).

Si dichiarara inoltre ricevimento delle soluzioni seguenti: quistione **64**. dal Sig. R. Bettazzi, S. Catania, P. Morino, G. Russo, F. Viaggi; **65**. S. Catania, F. Viaggi; **66**. O. Manfredi, G. M. Nobile, P. P. Rizzuti; **67**. R. Bettazzi, L. Carlini, F. Viaggi; **68**. S. Catania, F. Viaggi; **69**. C. Aiello, R. Bencivenga, O. Manfredi, G. M. Nobile; **70**. C. Aiello, R. Bencivenga, G. Bitonti, S. Lopriore, P. Marano, G. M. Nobile; **71**. C. Aiello, R. Bencivenga, S. Lopriore, A. Restifa; **72**. C. Aiello, R. Bencivenga, G. M. Nobile; **74**. G. M. Nobile — soluzioni alle quali verrà data evasione, nel fascicolo venturo.

La Direzione.

QUISTIONI PROPOSTE (**)

75*. Dimostrare che se A_1 , B_1 , C_1 , sono punti dei lati BC , CA , AB d'un triangolo così situati che, posto $\frac{BA_1}{BC} = h$, $\frac{CB_1}{CA} = k$, $\frac{AC_1}{AB} = l$, abbia luogo la relazione

(*) Altre soluzioni si riceverono dal Sigg. C. Aiello (R. Liceo V. E. Napoli), G. Bitonti Istituto tecnico Catanzaro), S. Lopriore (R. Liceo Bari), A. Musci (R. Istituto tecnico Arezzo).

(**) Il tempo utile per l'invio delle soluzioni delle quistioni nuove e di quelle rimaste insolute scade un mese e mezzo dopo la chiusura della redazione del fascicolo. La data di chiusura si troverà nell'ultima pagina di ciascun numero del Periodico.

Le quistioni contrassegnate con asterisco sono esclusivamente indirizzate agli alunni delle nostre scuole.

$$(2h - 1)a^2 + (2k - 1)b^2 + (2l - 1)c^2 = 0,$$

le perpendicolari ai lati BC , CA , AB , condotte dai punti A_1 , B_1 , C_1 , passano per uno stesso punto.

76. Trovare una relazione fra i coseni degli angoli $A'AB$, $B'BC$, $C'CA$ che le rette AA' , BB' , CC' , fra loro parallele e situate da una stessa banda del piano ABC , formano coi lati AB , BC , CA del triangolo ABC , supposto equilatero.

D. BESSO.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

I principii di Geometria logicamente esposti. Saggio di GIUSEPPE PEANO, Professore nella R. Accademia militare, libero docente nella R. Università di Torino. Torino, Bocca, 1889, p. 40.

Nella chiusa della Rivista bibliografica che pubblicammo or fa un anno in questo *Periodico* (*) intorno agli *Arithmetices principia* del prof. Peano, noi abbiamo espressa la nostra convinzione che il Calcolo della logica fosse suscettibile di applicazioni numerose assai ed abbiamo citato come esempio un'esposizione fatta col suo aiuto dei principii della Geometria. Poco tempo dopo, tale nostra previsione riceveva una luminosa conferma dall'opuscolo di cui ora intendiamo occuparci, nel quale appunto lo stesso A. riprende *ex-novo* la questione di determinare un gruppo di assiomi geometrici, combinando i quali colle norme note del comune raziocinio, si possano dimostrare tutte le proprietà delle figure. A intraprendere questo lavoro egli fu indotto non già — come a qualche lettore maligno potrebbe far credere il titolo che egli vi pose — perchè opinasse che i suoi predecessori, nel tracciare le prime linee della Scienza dell'estensione, si fossero scostati dai precetti della Logica, ma collo scopo di mettere in luce l'utilità che si ritrae dal sostituire in tali ricerche delicatissime l'Algebra logica all'ordinario ragionamento.

Nè è difficile rendersi conto di quanto ragionevolmente egli si sia proposto di raggiungere tale intento. Infatti l'applicazione del procedimento anzidetto esige definizioni precise degli enti considerati ed enunciazioni esplicite di tutte le proposizioni su cui ci si fonda, epperò rende impossibile che si interpreti in vari modi una stessa definizione e che si applichino proposizioni non ancora enunciate o dimostrate; quindi sembra che il Calcolo logico, col presentare dinanzi agli occhi quasi gli scheletri dei ragionamenti, spiani la via più naturale e sicura per porne in evidenza gli organi essenziali e sia da ritenersi come il metodo

(*) T. IV p. 154-156.

migliore per uno studio anatomico di un'argomentazione qualsiasi. Epperò l'algoritmo dialettico è e sarà un potente ausiliario in tutte quelle investigazioni in cui fa mestieri (come in quelle compiute dal Peano) stabilire quali e quante ipotesi convenga fare su un certo complesso di dati a fine di potere concludere che questi posseggono un certo complesso di proprietà.

Non si aspetti il lettore di trovare qui una enumerazione dei postulati su cui il prof. Peano propone di fondare la Geometria, nè l'indicazione dei teoremi da lui dimostrati; non facciamo la prima, nè diamo la seconda perchè, onde giudicare rettamente i criterii che guidarono l'A. nella scelta delle proposizioni assunte per vere o dimostrate, è indispensabile seguire passo passo i suoi ragionamenti. Diciamo soltanto che egli, come già fece il Pasch nelle sue *Vorlesungen ueber neuere Geometrie*, parte dai concetti di *punto* e *segmento rettilineo* e costruisce col loro mezzo gli altri enti geometrici; ed aggiungiamo che ad un certo punto i due scrittori battono cammini affatto differenti (*).

Nel testo di questo *Saggio* l'A. studia diffusamente la parte della Geometria che precede la *teoria delle parallele*; in un *Appendice* egli si occupa di tale teoria e del modo di introdurre il concetto di *moto*; in una posteriore pubblicazione(**) egli ha gettate le basi di un'analoga esposizione della *Geometria di misura*. Perciò possiamo dire di possedere in complesso gli elementi per una completa trattazione degli elementi della Geometria fatta dal nuovo punto di vista. Ma è forza convenire che questi elementi esigono tuttora una elaborazione, probabilmente lunga e faticosa, per potere comporre qualche cosa di definitivo; ad ammettere la necessità di tale lavoro complementare si è spinti, fra l'altro, dalla considerazione che finora non ci è stato ancora detto in qual modo sia per manifestarsi l'influenza di queste investigazioni sui metodi per insegnare le prime proprietà dello spazio, influenza che presto o tardi si deve avvertire se esse posseggono in realtà quel valore scientifico che a noi sembra scorgervi.

Poichè il prof. Peano ha già discussi i fondamenti dell'Aritmetica e quelli della Geometria, così sembra poco verosimile che ci si presenti in avvenire l'occasione di occuparci qui di altri suoi contributi al Calcolo della logica. Perciò vogliamo rinnovare ora l'espressione della nostra piena approvazione al metodo da lui tenuto per diffondere questo nuovo ramo della Matematica. Invece di esporre con infiniti particolari di secondaria importanza i principii di questa dottrina - come fece non a guari uno scienziato ultramontano - egli si sforzò di condensarli in poche pagine e ne fece poi delle applicazioni belle ed importanti. Così egli raggiunse un triplice scopo: di non atterrire, cioè, la maggioranza degli studiosi con la prospettiva di una disciplina nuova, assai vasta e complicata; di mostrare, su esempj opportuni quali siano i caratteri essenziali del Calcolo logico, epperò in quali circostanze esso possa applicarsi con vantaggio e in che cosa consista questo vantaggio; di arrecare, finalmente, dei dati di fatto capaci

(*) L'indole di questo giornale e lo spazio di cui disponiamo non ci consentono di arrestarci sulle belle considerazioni di indole assai generale ed astratte, svolte dall'A. nelle *Note*: ci basti di averle segnalate all'attenzione dei lettori.

(**) *Les propositions du cinquième Livre d'Euclide, réduites en formules* (Mathesis, T. X).

di fungere da documenti per un giudizio equo ed illuminato sul Calcolo stesso, in base a cui decidere se questo debba collocarsi nel museo degli oggetti di curiosità scientifica, oppure se sia miglior consiglio accordargli un posto onorevole fra gli utensili proprii alle Scienze di ragionamento (*).

Mantova, 17 giugno 1890.

GINO LORIA.

Prof. BELLINO CARRARA. — *Algebra*. — Venezia, Tipografia Emiliana, 1890.

— Prezzo L. 5.

L'*Algebra* del Prof. BELLINO CARRARA è veramente preziosa per gli scolari dei Licei d'Italia; è divisa in cinquanta lezioni delle quali venticinque comprendono la materia del primo anno e le rimanenti quella del secondo; i titoli degli argomenti delle lezioni sono precisamente i diversi comma dei programmi ufficiali. I varii argomenti sono svolti abbastanza ampiamente e con sufficiente rigore; numerosi esercizi, giudiziosamente scelti ed ordinati, accrescono notevolmente il pregio dell'opera perchè molti sono risolti e discussi diligentemente e spesso la trattazione di problemi generali vi è ben preparata con quella di facili problemi particolari; delle questioni non risolte sono dati i risultati finali.

Parmi però che si sarebbe guadagnato in chiarezza e rigore ponendo meglio in evidenza i postulati e le definizioni, basi delle diverse teorie; i numeri negativi e gli irrazionali, p. es., non sono abbastanza chiaramente stabiliti con postulati convenienti e le operazioni con numeri irrazionali non sono definite; per la somma, p. es., si sarebbe potuto dimostrare che, se u_n ed u'_n sono variabili razionali coi limiti U ed U' , tende ad un limite ancora la variabile razionale $u_n + u'_n$ e porre come definizione che questo limite è la somma $U + U'$; con ciò si sarebbe acquistato il diritto di parlare di somma di numeri irrazionali tra loro e coi razionali. Non è dato con precisione il significato di numero aritmetico che, essendo rapporto di grandezze omogenee, è un numero, razionale od irrazionale, nè positivo nè negativo, ed il significato attribuito a numero algebrico non è quello, generalmente adottato, di radice d'equazione a coefficienti interi. Alcune definizioni, sebbene universalmente accettate, non sono abbastanza chiare; tale è quella della moltiplicazione perchè, p. es., $3^2 \cdot (3 + 3)$ non è eguale a $3 \cdot 2$ sebbene sia $2 = 1^1 \cdot (1 + 1)$: siffatte definizioni dovrebbero esser date come definizioni complesse riunenti più definizioni semplici e precise date innanzi. Bene fece l'autore conservando per il teorema sulla divisibilità per $x - a$ l'antica, notissima e semplicissima, dimostrazione criticata anche in questo periodico; ma doveva renderla rigorosa premettendo, p. es., il teorema, facilissimo a dimostrarsi: « Due polinomii non identici con una lettera comune prendono diverso valore

(*) Come abbiamo fatto per gli *Arithmetices Principia* indichiamo alcuni errori di stampa dell'opuscolo ora discusso:

p. 6 dal basso	linea 18;	invece di distributiva	leggi associativa
» 21 dall'alto	» 9	» » $a'b'd$	» $a'b'd$
» 24	» 14	» ab è identico a cd	» ac è identico a bd
» 39 dal basso	» 10	» » $a'b' c'f$	» $a'b' c'f$

per infiniti valori diversi della lettera comune ». Nella definizione di proporzionalità data in principio del numero 299 non è compresa la condizione, notoriamente necessaria, che quando l'una grandezza cresca debba crescere anche l'altra; se tutti i numeri aritmetici fossero divisi nelle classi

$$A_1 A_2 A_3 \dots$$

tali che nessun numero fosse esprimibile razionalmente mediante uno di classe diversa, essendo fissati i numeri

$$k_1 k_2 k_3 \dots$$

arbitrariamente, si potrebbe far corrispondere ad ogni numero della classe A_m il prodotto del medesimo per k_m ; considerando quei numeri come i valori d'una grandezza A ed i loro corrispondenti come i valori di una grandezza B , si troverebbero A e B nella relazione accennata in principio del n.º 299 senza essere proporzionali; si potrebbe p. es., far corrispondere ad ogni valore razionale di A lo stesso valore di B e ad ogni valore irrazionale di A il valore doppio di B .

Per l'indole affatto elementare che deve avere l'insegnamento scientifico nelle scuole classiche, sono certamente di quasi nessuna importanza le precedenti osservazioni e le altre che potrebbero esser fatte all'algebra di cui mi sono occupato sicchè, pei molti suoi pregi accennati sopra parmi che risponda assai bene alle esigenze degli orarii e programmi vigenti nei nostri Licei.

F. GIUDICE.

Dott. GIUSEPPE BERNARDI. — *Tavole dei quadrati e cubi dei numeri interi da 1 a 1000*. Parma. Tipografia Ferrari e Pellegrini, 1898. Prezzo: L. 1.50.

Le tavole del Prof. BERNARDI contengono oltre ai quadrati e cubi, i doppi, e i tripli quadrati dei numeri da 1 a 1000. Il pregio delle medesime consiste essenzialmente nella introduzione in cui l'A. risolve con molta chiarezza di dettaglio i problemi nei quali possono utilizzarsi tavole di questa natura. Notevoli fra questi i problemi VII e IX, la cui soluzione riposa sopra due teoremi, sviluppati nella introduzione, per mezzo dei quali, con calcolo abbreviato, vengono trovate le radici quadrate dei numeri interi fra 1000000 e 10 bilioni e le radici cubiche degli interi fra 1 bilione ed 1 quattrilione. Il 2º di questi teoremi, che contiene un'eccezione importante, merita d'essere riportato ed è il seguente:

Se la radice cubica di un numero intero a, esatta, od approssimata a meno di una unità per difetto, ha $2n + 1$ cifre almeno, e se si indica con c il numero formato dalle cifre di essa, escluse le n prime a destra, con q il quo-

ziente e con r il resto della divisione $\frac{a - c^3 \cdot 10^{3n}}{3 c^2 \cdot 10^{2n}}$, ponendo cioè:

$$\frac{a - c^3 \cdot 10^{3n}}{3 c^2 \cdot 10^{2n}} = q + \frac{r}{3 c^2 \cdot 10^{2n}},$$

si ha in generale: $\sqrt[3]{a} = c \cdot 10^n + q$, esattamente, od a meno d'una unità

per difetto, ovvero a meno d'una unità per eccesso, secondochè rispettivamente è

$$r \begin{cases} > \\ < \end{cases} 3q^2c \cdot 10^n + q^3.$$

Fanno però eccezione i 10^{3n} numeri interi compresi fra i 2 limiti $(10^{2n} + 10^n)^3 - 10^{3n}$ e $(10^{2n} + 10^n)^3 - 1$ inclusi, per tutti i quali si ha

invece: $\sqrt[3]{a} = c \cdot 10^n + q$, a meno di due unità per eccesso.

Per questi titoli le tavole in discorso parmi possano riuscire di giovamento agli alunni delle Scuole secondarie.

A. LUGLI.

Publicazioni ricevute dalla Direzione del Periodico

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm: n. 2, 1890.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del professore G. BATTAGLINI. Vol. XXVIII. Marzo-Aprile, Maggio-Giugno, 1890. Napoli, B. Pellerano editore.

Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas, publicado pelo Dr. F. GOMES TEIXEIRA, professor na Academia Polytechnica do Porto. Vol. IX, n. 4, 5. Coimbra 1889.

Journal de Mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. G. DE LONGCHAMPS, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, L. LÉVY, agrégé des sciences mathématiques, directeur des études à l'École préparatoire de Saint-Barbe. 3^e Série, Quatorzième année. N. 5, 6, 7, 8. Mai, Juin, Juillet, Août, 1890. Paris, librairie Ch. Delagrave.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par H. VUIBERT. 14^e année. N. 16, 17, 18, 19, 20. Paris, M. Nony et C., 17 rue des Écoles, 1890.

Mathesis, recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. MANSION, professeur à l'Université de Gand, et J. NEUBERG, professeur à l'Université de Liège. Tome dixième. Juillet, Août-Septembre, 1890. Paris, Gauthiers-Villars e fils; Gand Ad. Hoste, Editeur.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2^a, Vol. IV, Fasc. 5^o e 6^o, Maggio, Giugno 1890.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Ein Organ für Methodik, Bildungsgehalt und Organisation der exakten Unterrichtsfächer an Gymnasien, Realschulen, Lehrerseminarien und gehobenen Bürgerschulen, herausgegeben von J. C. V. HOFFMANN. XXI Jahrgang. 4, 5 Heft. Leipzig, B. G. Teubner, 1890.

BERNARDI (F.) — Nozioni elementari dei numeri immaginari e dei numeri complessi. R. Tipografia editrice Salentina: Lecce 1890.

BOLTSHAUSER (G. A.) — Le linee equitermiche in Italia (Bollettino mensile dell'Osser. di Moncalieri, Serie II, vol. X, n. 6).

CARRARA (B.) — La matematica nei licei del Regno esposta in lezioni ed esempi alla gioventù studiosa — Parte 1^a: Algebra — Venezia, Tipografia Emiliana, 1890. — Prezzo: L. 5.

— — La moderna meteorologia in Italia. Cremona, V. Ghisani, Tipografo, 1890.

- CASEY (F.) — Géométrie élémentaire récente. Traduit de l'anglais par *Fr. Fatisse*: avec une Préface par M. *I. Neuberg*. Paris, Gauthier-Villars e fils; Gand, Ad. Hoste, Editeur; 1890.
- DELITALA (G.) — Ricerche di Stereometria. Sassari, Editore-Tipografo G. Dessi, 1890.
- — Una questione di estimo privato (non catastale): Sulla stima dei miglioramenti fondiari (Rivista di Topografia e Catasto. n. 8, febb. 1890) — Sulla costante del planimetro polare di Amsler, Sassari, 1890.
- GIUDICE (F.) — Due teoremi sulle serie a termini positivi — Osservazioni sulle serie — Un nuovo criterio di convergenza per le serie a termini positivi — Per un recente articolo del Sig. Fouret (Rend. Cir. mat. di Palermo, Tomo IV, 1890).
- INGRAMI (G.) — Sulle funzioni implicite di una variabile reale (Rend. sessioni R. Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna 1889) — Sulla rappresentazione analitica per una funzione reale di due variabili reali. Bologna, Tip. Gamberini e Parmeggiani, 1889).
- JUNG (G.) — Un'osservazione sul grado massimo dei sistemi lineari di curve piane algebriche (Annali di matematica, Tomo XVII) — Delle famiglie associate di sistemi lineari e delle superficie univocamente rappresentabili sul piano (Rend. Cir. mat. di Palermo, IV. 1890).
- Lettera di Temistocle Zona a proposito di un lavoro di triangolazione del Prof. Venturi. Palermo, Tip. Fratelli Vena, 1890.
- LIVERANI (A.) — Fra una lezione e l'altra. Livorno, A. Debatte, 1890.
- LONGCHAMPS (G. de) — Sur les paraboles de M. Artzt (Journal de Mathé. spéciales, 1890).
- LORIA (G.) — Il periodo aureo della Geometria greca (Memorie R. Acc. delle Scienze di Torino, Serie II, Tomo XL).
- MARCOLONGO (R.) — Sulle geodetiche tracciate sulle quadriche prive di centro (Rend. R. Acc. Lincei, 1890) — Deformazione di una sfera omogenea isotropa per speciali condizioni ai limiti (Idem, idem).
- MITTAG-LEFFLER (G.) — Sur la représentation analytique des intégrales et des invariants d'une equation différentielle linéaire et homogène (Acta mathematica, tome 15).
- PANIZZA (F.) — Aritmetica razionale. Manuale Hoepli, Milano, 1890 — Prezzo L. 1,50.
- PASCAL (E.) — Sopra le funzioni iperellittiche di 1^a Specie (1.^{ter} Stufe) per $p = 2$. Memoria V (Annali di mat. Serie II, XVIII).
- PEANO (P.) — Les propositions du cinquième livre d'Euclide, réduites en formules — Sur l'interversion des dérivations partielles (Mathesis, tome X, 1890).
- PRINCIVALLE (F.) — Trattato di aritmetica pratico per le Scuole secondarie con note storiche e 600 esercizi. Sassari, Tip. Azuni, 1889. — Prezzo L. 1,60.
- RAZZABONI (A.) — Sulle flessioni dell'evoluto del catenoide (Giornale di matematiche di Battaglini, Vol. XXVIII, 1890).
- RICCARDI (P.) — De propositione novae Bibliothecae mathematicae italicae seculi XIX (Biblioteca mathe. par G. Eneström, 1890).
- TIBERI (E.) — Teoria generale sulle condizioni di divisibilità dei numeri e nuova dimostrazione del teorema di Pappo e di Pitagora — Arezzo, Tip. Cagliani, 1890.
- VIAGGI (F.) Sulla similitudine di triangoli appartenenti a due serie (Giornale di matematiche di Battaglini, Vol XXVIII, 1890).
- VUIBERT (H.) — Annuaire de la jeunesse pour l'année 1890. Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles. Prix: 3 francs.

TEMI DI MATEMATICA

PER LA LICENZA D'ISTITUTO TECNICO

NELLA SEZIONE FISICO-MATEMATICA

(Continuazione e fine).

AUTUNNO 1890, I). — *In un cono si conosce la differenza fra la superficie laterale e quella della base, e si conosce la somma di queste due superficie. Trovare l'apotema e l'altezza del cono, e il raggio della sua base, e discutere i risultati.*

Indicando rispettivamente con πs_1^2 e πs_2^2 la differenza e la somma date, con x, y, z il raggio della base, il lato e l'altezza del cono, il problema dà luogo al sistema di equazioni:

$$x(y - x) = s_1^2; \quad x(y + x) = s_2^2; \quad y^2 = x^2 + z^2.$$

Risolvendolo, il che è assai semplice, si trova

$$x = \sqrt{\frac{s_2^2 - s_1^2}{2}}; \quad y = \frac{s_1^2 + s_2^2}{\sqrt{2(s_2^2 - s_1^2)}}; \quad z = \frac{2s_1s_2}{\sqrt{2(s_2^2 - s_1^2)}}.$$

Questi valori non sono reali e finiti che nel caso in cui sia $s_2 > s_1$, il che è in accordo colla natura del problema proposto, la somma delle due superficie dovendo superare necessariamente la loro differenza. È poi opportuno osservare che avendosi sempre $s_1^2 + s_2^2 > 2s_1s_2$, segue, com'era da aspettarsi, $y > z$.

ESTATE 1871, b). — *Risolvere le due equazioni a due incognite*

$$(x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{64}{15}, \quad x^2 + y^2 = 136.$$

Riducendo la prima a forma intera e sostituendo in luogo di $x^2 + y^2$ il valore dato dalla seconda, si ottiene un'equazione di 1° grado in xy , da cui deducesi $xy = 60$. Dopo ciò dal sistema sem-

plicissimo

$$xy = 60 \quad x^2 + y^2 = 136$$

si ricavano immediatamente le due soluzioni: $x = 6$, $y = 10$; $x = -6$, $y = -10$.

ESTATE 1872, II). — *Da due punti A e B del terreno, nei quali si può far stazione con un grafometro, si vedono due punti inaccessibili X ed Y. Determinare la distanza XY conoscendo gli angoli $XAY = 0^\circ. 25'. 3''$, $XAB = 121^\circ. 0'. 11''$, $XBA = 45^\circ$, $XY = 0^\circ. 0'. 24''$ e la distanza $AB = m. 152$.*

Risposta: chiamando d la distanza AB e supponendo i quattro punti A, B, X, Y in uno stesso piano, e così situati che il punto Y cada fuori del triangolo formato dagli altri tre, si deduce con procedimento noto (V. SERRET. *Trig.* libro 4°) $XY = d \cdot 0,0840194 = m. 12,711$.

ESTATE 1873, I) — *Date le equazioni $x^5 + y^5 = 17050$, $x + y = 10$, trovare i valori di x ed y .*

Dall'identità

$$x^5 + y^5 = (x + y)^5 - 5(xy)(x + y)^3 + 5(xy)^2(x + y),$$

in seguito ai valori dati per $x + y$ ed $x^5 + y^5$, segue l'equazione di 2° grado in xy

$$(xy)^2 - 100(xy) + 1659 = 0,$$

da cui deducesi $xy = 79$ od $xy = 21$. I valori di x ed y sono perciò da cercarsi fra le radici delle equazioni

$$X^2 - 10X + 79 = 0, \quad X^2 - 10X + 21 = 0$$

e poichè le radici della prima sono immaginarie e quelle della seconda sono 3 e 7, così questi numeri sono precisamente i valori cercati.

AUTUNNO 1873, I). — *Trovare quattro numeri in progressione geometrica data la loro somma $= 45$ e quella dei loro quadrati $= 765$.*

Chiamando, in generale, a la somma dei quattro numeri, b^2 quella dei loro quadrati e rappresentando con x il primo numero e con y la ragione della progressione, le equazioni del problema sono

$$x + xy + xy^2 + xy^3 = \frac{x(y^4 - 1)}{y - 1} = a,$$

$$x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 + x^2y^6 = \frac{x^2(y^8 - 1)}{y^2 - 1} = b^2.$$

Quadrando la prima, poi dividendo membro a membro questa e la seconda equazione, si ha:

$$\frac{(y^4 - 1)(y + 1)}{(y - 1)(y^4 + 1)} = \frac{a^2}{b^2},$$

e sopprimendo il fattore $y - 1$, che ancora rimane comune ai termini del quoziente, e riducendo a forma intera, risulta

$$(a^2 - b^2)y^4 - 2b^2y^3 - 2b^2y^2 - 2b^2y + (a^2 - b^2) = 0,$$

equazione reciproca di 4° grado, che è facile risolvere.

Introducendo i valori particolari dati nell'enunciato, questa equazione si trasforma nell'altra

$$14y^4 - 17y^3 - 17y^2 - 17y + 14 = 0$$

che dà per y le due radici reali 2 e $\frac{1}{2}$ e due radici immaginarie. Seguono, per la 1ª delle equazioni del problema, i valori corrispondenti per x , 3 e 24 , cosicchè i quattro numeri cercati sono $\div 3 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 24$.

AUTUNNO 1873, II). — *Dato il perimetro d'un triangolo* $2p = 8644^m, 204$ *e gli angoli* $A = 73^\circ \cdot 42' \cdot 50'', 04$; $B = 57^\circ \cdot 32' \cdot 7'', 54$; $C = 48^\circ \cdot 45' \cdot 2'', 42$ *calcolare il raggio del circolo inscritto, il raggio del circolo circoscritto e l'area del triangolo.*

Dalle note formole

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, & \operatorname{tg} \frac{1}{2} B &= \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} C &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}, \end{aligned}$$

moltiplicando membro a membro ed osservando che

$$\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

si deduce immediatamente

$$[1] \quad \Delta = p^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \operatorname{tg} \frac{1}{2} B \operatorname{tg} \frac{1}{2} C$$

e per essere $r = \frac{\Delta}{p}$

$$[2] \quad r = p \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \operatorname{tg} \frac{1}{2} B \operatorname{tg} \frac{1}{2} C.$$

Avendosi poi

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} =$$

$$\frac{a+b+c}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C} = \frac{2p}{4 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C},$$

si ricava

$$a = \frac{p \operatorname{sen} \frac{1}{2} A}{\cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}, \quad b = \frac{p \operatorname{sen} \frac{1}{2} B}{\cos \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} A}, \quad c = \frac{p \operatorname{sen} \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B},$$

per cui da $R = \frac{abc}{4\Delta}$, sostituendo, segue

$$[3] \quad R = \frac{p}{4 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}.$$

Valendosi delle formole [1], [2], [3] e tenendo conto dei valori assegnati nell'enunciato, si ottiene

$$r = \text{m. } 806,00; \quad R = \text{m. } 1691,33; \quad \Delta = \text{m.}^2 1691,33.$$

ESTATE 1874, I). — *Trovare quattro numeri in proporzione geometrica, data la somma dei medi, la somma degli estremi, e la somma delle quarte potenze dei quattro termini. — Applicare la formola generale al caso speciale in cui la somma dei medi sia 10, quella degli estremi 11, e la somma delle quarte potenze 5729.*

Indicando con x ed y il 1° e 3° termine della proporzione, con z il rapporto comune, con a, b, c^4 , rispettivamente, le tre somme date, si avranno le equazioni

$$x + yz = a, \quad y + xz = b, \quad x^4 + y^4 z^4 + y^4 + x^4 z^4 = c^4.$$

Innalzando alla quarta potenza i membri della prima 1ª e 2ª equazione, poi addizionandole e tenendo conto della terza equazione, si ottiene

$$c^4 + 4xyz(x^2 + y^2 + y^2 z^2 + x^2 z^2) + 12x^2 y^2 z^2 = a^4 + b^4.$$

Ora quadrando la 1ª e 2ª equazione, quindi addizionando, si ricava

$$x^2 + y^2 + y^2 z^2 + x^2 z^2 = a^2 + b^2 - 4xyz,$$

onde sostituendo nell'equazione precedente, fatte le debite riduzioni, si deduce l'equazione seguente

$$4(xyz)^2 - 4(a^2 + b^2)(xyz) + a^4 + b^4 - c^4 = 0,$$

di 2° grado in xyz e da cui si ha

$$xyz = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{2a^2 b^2 + c^4}}{2}.$$

Indicando con x il 2° membro dell'equazione precedente, il sistema primitivo può così essere sostituito dal seguente

$$yz = a - x, \quad xz = b - y, \quad xyz = x.$$

Dividendo rispettivamente l'ultima di queste equazioni per le precedenti si ha, fatte le riduzioni:

$$x^2 - ax + x = 0, \quad y^2 - by + x = 0,$$

da cui

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - x}, \quad y = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - x}$$

e infine $z = x : (xy)$.

Si può notare che per la realtà dei valori di x ed y e, in generale, di quello di z , conviene che sia $\frac{a^2}{4} \geq x$ e $\frac{b^2}{4} \geq x$ e poichè $x =$

$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \pm \frac{\sqrt{2a^2b^2 + c^4}}{2}$, ha due valori uno dei quali è maggiore sia di $\frac{a^2}{4}$ come di $\frac{b^2}{4}$, cioè quello che si ottiene prendendo il segno $+$ pel radicale, così consegue che in ogni caso per α devesi prendere la espressione $\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{\sqrt{2a^2b^2 + c^4}}{2}$, senza che derivi da ciò sempre la realtà per x, y, z .

Nel caso particolare dell'enunciato risulta $\alpha = 24$, e poichè sia $\frac{a^2}{4}$ che $\frac{b^2}{4}$ sono maggiori di 24, così i valori di x, y, z sono reali e si hanno i seguenti sistemi di soluzioni

$$\left(6, 8, \frac{1}{2}\right), \left(4, 8, \frac{3}{4}\right), \left(6, 3, \frac{4}{3}\right), \left(4, 3, 2\right)$$

a cui corrispondono le proporzioni:

$$3 : 6 = 4 : 8; \quad 3 : 4 = 6 : 8; \quad 8 : 6 = 4 : 3; \quad 8 : 4 = 6 : 3.$$

ESTATE 1874, II). — *Trovare e discutere il luogo geometrico di un punto tale che la somma o la differenza delle tangenti condotte da esso a due cerchi dati di grandezza e di posizione, sia eguale ad una retta data.*

Siano O e C (Tav. II, fig. 1^a) i dati cerchi di raggi R ed r e riferiamo i punti del piano al sistema di assi coordinati ortogonali OC, OY . Posto $OC = d$ e chiamando M un punto del luogo, cioè un tal punto dal quale conducendo le tangenti MA, MB ai due cerchi O e C , abbiasi $AM \pm MB = a$, dove a rappresenta il dato segmento, trattasi di trovare l'equazione del luogo medesimo.

Si osservi a tal uopo che si ha

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{MP}^2, \quad \overline{MC}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{MP}^2,$$

essendo P il piede della perpendicolare calata da M sull'asse OC delle x , od $\overline{OM}^2 = x^2 + y^2$; $\overline{MC}^2 = (d - x)^2 + y^2$, sicchè dai triangoli rettangoli AOM, MCB segue subito:

$$AM = \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}; \quad MB = \sqrt{(d - x)^2 + y^2 - r^2}$$

e l'equazione cercata sarà:

$$\sqrt{x^2 + y^2 - R^2} \pm \sqrt{(d-x)^2 + y^2 - r^2} = a.$$

Quadrando due volte, coll'attenzione d'isolare in un membro il radicale che rimane dopo la prima quadratura, l'equazione precedente diviene razionale, e, fatte le opportune riduzioni, si trasforma nella seguente

$$4x^2(d^2 - a^2) + 4dx(r^2 + a^2 - d^2 - R^2) - 4y^2a^2 = \\ 4R^2r^2 - 4R^2d^2 - [d^2 - (R^2 + r^2 + a^2)]^2$$

che può anche scriversi

$$[1] \quad 4(d^2 - a^2)x^2 - 4a^2y^2 + 4d(r^2 + a^2 - d^2 - R^2)x + \\ (4a^2R^2 + (d^2 + R^2 - a^2 - r^2)^2) = 0.$$

Il luogo cercato è dunque una conica della quale la OC , ossia l'asse delle x , è asse della curva, in quantochè ad ogni valore di x corrispondono valori uguali e di opposto segno per y .

Per decidere intorno alla natura di questa conica, si calcoli dapprima il *discriminante* Δ della [1]. Questo è

$$\Delta = -16a^2(d^2 - a^2)\{4a^2R^2 + (d^2 + R^2 - r^2 - a^2)^2\} \\ + 16a^2d^2(r^2 + a^2 - d^2 - R^2)^2 = 16a^4((R^2 + r^2 + a^2 - d^2)^2 - 4R^2r^2);$$

mentre il *discriminante* Θ dei termini al 2° grado di [1] è

$$\Theta = 16a^2(a^2 - d^2).$$

Segue da ciò, in seguito alla nota discussione delle linee di 2° ordine (*), che il luogo cercato sarà una parabola quando sia $d = a$ ed $R \geq r$. Infatti in questo caso si ha:

$$\Theta = 0, \quad \Delta = 16a^4((R^2 + r^2)^2 - 4R^2r^2) = 16a^4(R^2 - r^2)^2 > 0,$$

che se poi fosse anche $R = r$, sarebbe $\Delta = 0$ e il luogo si ridur-

(*) D'OVIDIO. *Geometria analitica*.

rebbe ad una *coppia di rette parallele*. In questo caso invero la [1] diviene

$$y^2 = R^2, \quad \text{da cui} \quad y = \pm R.$$

Dunque: *le tangenti parallele e comuni a due circonferenze uguali costituiscono il luogo geometrico dei punti pei quali le tangenti condotte alle circonferenze stesse hanno una somma o differenza costante uguale alla retta congiungente i centri*, com'è agevole verificare anche geometricamente.

Se poi sia $d > a$, allora $\mathbf{C} < 0$ e il luogo è una *iperbole*, mentre se $d < a$ e quindi $\mathbf{C} > 0$, il luogo è una *ellisse*.

È assai facile costruire per punti il luogo stesso, prescindendo dalle considerazioni precedenti. Essendo a il segmento dato, somma o differenza delle tangenti, si conducano da due punti arbitrari R, T , delle date circonferenze, le tangenti RS, TU e prendansi sulle medesime dei segmenti RS, TU tali che sia $RS = m < a$ e $TU = a - m$, o $RS = m > a$ e $TU = m - a$, a seconda dei casi, quindi si descrivano le circonferenze concentriche ad O e C coi raggi rispettivi OS, CU ; i loro punti d'intersezione M, N saranno evidentemente punti del luogo. Se poi prendesi su RS e TU , $RH = a$ e $TV = a$ e si tracciano le circonferenze di centri O e C e raggi OH, CV , i punti $I, L; D, E$ in cui queste incontrano le circonferenze date sono punti comuni a queste ed al luogo richiesto.

È interessante notare che nei punti $I, L; D, E$ le circonferenze O e C e la conica [1] sono tangenti. Per dimostrare ciò si chiamino x', y' ed x'', y'' , rispettivamente, le coordinate dei punti D, I . È chiaro, per la costruzione fatta, che x', y' saranno le soluzioni comuni alle equazioni

$$[2] \quad x^2 + y^2 = R^2, \quad (d - x)^2 + y^2 = a^2 + r^2,$$

mentre x'', y'' saranno le soluzioni comuni alle equazioni

$$[3] \quad x^2 + y^2 = R^2 + a^2, \quad (d - x)^2 + y^2 = r^2.$$

Dai sistemi [2] e [3], si ricava subito

$$[4] \quad x' = \frac{R^2 + d^2 - a^2 - r^2}{2d}, \quad x'' = \frac{R^2 + a^2 - r^2 + d^2}{2d}.$$

Ora, fermandoci al punto D , l'equazione della tangente al luogo rappresentato dalla [1] nel punto stesso, è (*)

$$\{4(d^2 - a^2)x' + 2d(r^2 + a^2 - d^2 - R^2)\}x - 4a^2y'y + 2d(r^2 + a^2 - d^2 - R^2)x' + 4a^2R^2 + (d^2 + R^2 - r^2 - a^2)^2 = 0,$$

la quale, con la sostituzione ad x' del valore [4], si trasforma nella seguente

$$\frac{4a^2}{2d}(a^2 + r^2 - d^2 - R^2)x - 4a^2y'y + 4a^2R^2 = 0,$$

che può anche scriversi

$$x'x + y'y - R^2 = 0;$$

ma questa è la tangente al cerchio dato O nel punto $[x', y']$, dunque questo cerchio e la conica [1] hanno nel punto D la tangente in comune. Lo stesso vale per I e quindi anche, per la simmetria della figura rispetto ad OC , per i punti E ed L .

Ma vi ha un'altra proprietà degna di considerazione. Immaginiamo descritto l'asse radicale GF dei cerchi dati, luogo dei punti pei quali le tangenti condotte ai cerchi medesimi sono uguali, e proponiamoci di trovare l'ascissa del punto in cui questo taglia OC . Un punto di quest'asse radicale potrà evidentemente trovarsi descrivendo due circonferenze di centri O e C e aventi per raggi, rispettivamente, le ipotenuse di due triangoli rettangoli di cateti R ed $\frac{a}{2}$, r ed $\frac{a}{2}$: un tal punto avrà per conseguenza per coordinate i valori x''' , y''' di x ed y soddisfacenti al sistema di equazioni

$$[5] \quad x^2 + y^2 = R^2 + \frac{a^2}{4}, \quad (d - x)^2 + y^2 = r^2 + \frac{a^2}{4},$$

da cui ricavasi

$$[6] \quad x''' = \frac{R^2 + d^2 - r^2}{2d}.$$

Ora, in seguito alle [4], si ha

(*) Cfr. D'OVIDIO, o. c.

$$\frac{x' + x''}{2} = \frac{R^2 + d^2 - r^2}{2d} = x''',$$

si può così concludere, tenendo conto anche di ciò che si è detto precedentemente, che

Il luogo geometrico dei punti pei quali le tangenti condotte a due circonferenze date hanno una somma o differenza costante è una conica avente un doppio contatto colle circonferenze. Le corde di contatto sono parallele e l'asse radicale delle due circonferenze è equidistante da queste corde.

Osservazione. — Supponendo $a = 0$, ossia proponendoci di determinare il luogo dei punti pei quali la differenza delle tangenti condotte ai dati cerchi è nulla, l'equazione [I] si trasforma nella

$$4d^2x^2 + 4d(r^2 - d^2 - R^2)x + (d^2 + R^2 - r^2)^2 = 0,$$

che può scriversi

$$[2dx + r^2 - d^2 - R^2]^2 = 0,$$

da cui

$$x = -\frac{d^2 + R^2 - r^2}{2d};$$

il luogo degenera così in una retta, perpendicolare alla congiungente i centri dei due cerchi, che non è altro che l'asse radicale dei medesimi (Cfr. con la [6]).

AUTUNNO 1874, II). — *Data la base di un triangolo $a = 3246^m,927$, l'altezza $h = 2145,797$, e la somma degli altri due lati $b + c = 5397,278$, risolvere il triangolo.*

Avendosi

$$\Delta = \sqrt{p^2(p-a)^2 \frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \sqrt{p^2(p-a)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} A},$$

si ricava

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \frac{\Delta}{p(p-a)},$$

sicchè posto $b + c = s$, l'angolo A risulta determinato dalla relazione

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \frac{2ah}{(s-a)(s+a)}.$$

Da $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$, si deduce poi

$$\begin{aligned} \frac{b+c}{a} &= \frac{\text{sen } B + \text{sen } C}{\text{sen } A} = \frac{2 \text{sen } \frac{1}{2} (B+C) \cos \frac{1}{2} (B-C)}{2 \text{sen } \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A} \\ &= \frac{\cos \frac{1}{2} (B-C)}{\text{sen } \frac{1}{2} A}, \end{aligned}$$

onde: $\cos \frac{1}{2} (B-C) = \frac{s \cdot \text{sen } \frac{1}{2} A}{a}$, mentre è $B+C = \pi - A$.

Conoscendo così $B+C$ e $B-C$ potranno determinarsi B e C e quindi

$$b = \frac{a \text{sen } B}{\text{sen } A}, \quad c = s - b = \frac{a \text{sen } C}{\text{sen } A}.$$

Valendosi dei dati numerici dell'enunciato, si trova

$$\begin{aligned} A &= 73^\circ . 42' . 50''; \quad B = 57^\circ . 32' . 7''; \quad C = 48^\circ . 45' . 3''; \\ b &= \text{m. } 2854,026; \quad c = 2543,252. \end{aligned}$$

ESTATE 1875, II). — *Date tre tangenti e la direzione dei diametri di una parabola, trovare: 1° i punti di contatto delle tre tangenti date; 2° altre tangenti della curva; 3° i punti di contatto di queste tangenti.*

Sia u (fig. 2^a) la direzione data, comune ai diametri della parabola, e a, b, c le tre tangenti date. Taglinsi a e b in A , b e c in B . Conducendo per A una parallela a c e per B una parallela ad a , pel corollario al teorema di BRIANCHON che *in un quadrilatero semplice circoscritto ad una conica, le due diagonali e le congiungenti i punti di contatto dei lati opposti concorrono in un punto*, il punto O in cui si tagliano le parallele menzionate sarà un punto della congiungente il punto di contatto della tangente b col punto di contatto della retta all'infinito. Se dunque per O si conduce una parallela ad u e si trova il suo punto H d'incontro con b , sarà questo il punto in cui b tocca la conica.

Per trovare un'altra tangente della parabola, prendasi sulla c un punto qualunque C e si osservi che le tre tangenti date, la tangente condotta da C alla parabola e la retta all'infinito formano un pentagono circoscritto alla conica, sicchè per l'altro corollario del teorema di BRIANCHON, che *due diagonali e la congiungente il vertice per cui non passano queste due diagonali col punto di contatto del lato opposto, concorrono in uno stesso punto*, si avrà che trovato il punto d'intersezione L delle AC , BO , la HL sarà parallela alla tangente alla parabola passante per C , cosicchè questa tangente d si costruirà subito. Ed ora partendo dalle tre tangenti b , c , d si potrà, ripetendo la 1^a costruzione, trovare il punto di contatto della retta c colla parabola, poi ripetendo la 2^a costruzione per un punto D della a , potrà tracciarsi una 5^a tangente e trovare poi il punto di contatto di a colla conica e così di seguito, conforme a quanto è richiesto nell'enunciato.

Osservazione. — Trovati che siano due punti di contatto si possono avere agevolmente punti e tangenti della curva, fra i due primi, tirando la corda di questi, dividendola per metà, congiungendo il punto medio ottenuto col punto d'intersezione delle tangenti alle estremità della corda, dividendo per metà quest'ultima congiungente e per il punto così ottenuto guidando una parallela alla corda e ciò per una notissima proprietà della *polare*.

ESTATE 1875, IV). — *Fra due rette date allogare un segmento che sia veduto da due punti fissi sotto angoli dati.*

Siano $MO \equiv u$, $NO \equiv v$ le rette date, A e B i punti fissi ed α , β gli angoli dati sotto ai quali dev'essere veduto lo stesso segmento MN allogato fra le rette MO , NO .

Soluzione geometrica. — S'immagini che un angolo uguale ad α ruoti intorno al punto A (fig. 3^a) ed i suoi lati incontrino rispettivamente le rette u e v nei punti M' , M'' , M''' , ...; N' , N'' , N''' , È chiaro che le punteggiate così ottenute saranno proiettive poichè i fasci $A(M', M'', M''', \dots)$, $A(N', N'', N''', \dots)$, di cui sono sezioni, sono congruenti, dall'eguaglianza degli angoli $N'AM'$, $N''AM''$, ... risultando quella degli angoli $N'AN''$ ad $M'AM''$, $N'AN'''$ ad

$M'' A M''$, ecc.. Le congiungenti i punti corrispondenti delle due punteggiate involuppano per conseguenza una conica alla quale è pure tangente la retta cercata MN , insieme alle rette u e v poichè al punto O riguardato come appartenente all'una od all'altra di queste rette corrisponde un punto situato nell'altra.

Nello stesso modo si prova che la MN deve toccare la conica involuppo delle rette congiungenti i punti corrispondenti delle due punteggiate proiettive che si ottengono sulle rette u e v dalle intersezioni dei lati d'un angolo uguale a β ruotante intorno a B , la quale conica è ancora tangente ad u e v .

La retta cercata è dunque una tangente comune alle due coniche anzidette. E poichè dalle 4 tangenti in comune due sono le rette u e v , il problema ammette in generale due soluzioni.

Soluzione analitica. — Conducansi (fig. 4^a) AO , BO e supposto che la retta MN , segnata nella figura, sia quella cercata, pongasi $OM = x$, $ON = y$, $OA = a$, $OB = b$, angolo $MON = O$, ang. $MOA = \theta_1$, ang. $AON = \theta_2$, ang. $MOB = \psi_1$, ang. $BON = \psi_2$, ang. $OAM = A_1$, ang. $NOA = A_2$, ang. $OBM = B_1$, ang. $NBO = B_2$, dei quali angoli O , θ_1 e θ_2 , ψ_1 e ψ_2 sono da riguardarsi come noti, mentre per le coppie di angoli rimanenti sussistono solo le relazioni $A_1 + A_2 = \alpha$, $B_1 + B_2 = \beta$.

Posto ciò, fermandoci a considerare solo quello che avviene pel punto A , è chiaro che si avrà

$$\text{area } MON + \text{area } NAM = \text{area } AMO + \text{area } AON,$$

ossia, per l'applicazione d'un teorema notissimo di trigonometria

$$[1] \quad xy \sin O + AM \cdot AN \sin \alpha = a (x \sin \theta_1 + y \sin \theta_2).$$

Ora da relazioni conosciute, consegue

$$AM \sin A_1 = x \sin \theta_1, \quad AN \sin A_2 = y \sin \theta_2$$

$$AM \cos A_1 = a - x \cos \theta_1, \quad AN \cos A_2 = a - y \cos \theta_2$$

e mediante moltiplicazione della 1^a e 2^a di queste uguaglianze e della 3^a e 4^a, e successiva sottrazione dei prodotti ottenuti:

$$AM \cdot AN (\cos A_1 \cos A_2 - \sin A_1 \sin A_2) = \\ (a - x \cos \theta_1) (a - y \cos \theta_2) - xy \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

e finalmente sviluppando il prodotto indicato nel 2° membro e tenendo conto del teorema relativo al coseno della somma di due angoli

$$AM \cdot AN \cos \alpha = a^2 - a(x \cos \theta_1 + y \cos \theta_2) + xy \cos O.$$

Eliminando, servendosi di questa equazione e della [1], il prodotto $AM \cdot AN$, risulta

$$\begin{aligned} a^2 \sin \alpha - a(x \cos \theta_1 + y \cos \theta_2) \sin \alpha + xy \cos O \sin \alpha = \\ a(x \sin \theta_1 + y \sin \theta_2) \cos \alpha - xy \sin O \cos \alpha, \end{aligned}$$

la quale, dopo facili riduzioni, si riduce a

$$[2] \quad \sin(\alpha + O)xy - a \sin(\alpha + \theta_1)x - a \sin(\alpha + \theta_2)y + a^2 \sin \alpha = 0,$$

in cui sono quantità incognite soltanto x ed y .

Similmente ragionando pel punto B si è condotti all'altra equazione

$$[3] \quad \sin(\beta + O)xy - b \sin(\beta + \psi_1)x - b \sin(\beta + \psi_2)y + b^2 \sin \beta = 0.$$

Formando sistema delle equazioni [2] e [3], che sono di 2° grado in x ed y , possono ricavarsi i valori di queste due incognite, dopo di che il problema è completamente risoluto.

Osservando che le [2] e [3] sono della forma

$$mxy - nx - py + q = 0, \quad m_1xy - n_1x - p_1y + q_1 = 0$$

e che dall'eliminazione del termine in xy si ottiene

$$(m n_1 - m_1 n)x + (m p_1 - m_1 p)y + q m_1 - q_1 m = 0$$

risulta che x è esprimibile linearmente per y . Ricavando effettivamente x e sostituendo in una delle equazioni primitive si giunge ad un'equazione di 2° grado ad un'incognita. Segue da ciò che le [2] e [3] ammettono due sistemi di soluzioni, il che accorda con quanto risultava dalla soluzione geometrica.

AUTUNNO 1875, I). — *Trovare, con tre decimali esatti, una soluzione comune alle due equazioni*

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4xy + 13x + 6y + 1 &= 0, \\ x^2 + 6xy + 19x + 4y + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Eliminando il termine contenente xy dalle due equazioni si ha il sistema equivalente al dato

$$\begin{aligned} 4x^2 + x + 10y - 1 &= 0, \\ x^2 + 6xy + 19x + 4y + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Ricavando dalla prima di queste due y in funzione di x e sostituendo il valore ottenuto nella seconda, risulta l'equazione di 3° grado

$$[1] \quad 2x^3 + x^2 - 16x - 2 = 0;$$

liberandola dal 2° termine col porre $x = z + u$, poi determinando convenientemente $u \left(= -\frac{1}{6} \right)$ in modo che il coefficiente di z^2 si annulli, si giunge all'equazione

$$z^3 - \frac{97}{12}z + \frac{37}{108} = 0,$$

la quale confrontata con $z^3 + pz + q = 0$ dà per la quantità $27q^2 + 4p^3$ un numero negativo. Essa ha dunque le sue radici reali. Risolvendola trigonometricamente si trova $z' = +2,82169...$; $z'' = -2,86407$; $z''' = +0,04239$, sicchè i tre valori di x , soddisfacenti alla [1], saranno:

$$x' = +2,65502, \quad x'' = -3,03074; \quad x''' = -0,12428.$$

Se ora si osservi che

$$y = \frac{1 - x - 4x^2}{10},$$

i valori di y corrispondenti a quelli già trovati per x , saranno

$$y' = -2,9851; \quad y'' = -3,2710; \quad y''' = +0,1063.$$

È bene notare che dei tre sistemi di soluzioni trovati, l'ultimo non offre molta garanzia d'esattezza, essendo concorso a determinarlo il coseno d'un angolo prossimo a 90°.

AUTUNNO 1875, II). — *Descrivere una parabola tangente a tre rette date e passante per un punto dato.*

LEMMA. *Se una trasversale incontra una parabola, un diametro di questa, e la tangente all'estremità del diametro, il segmento della trasversale compreso fra la tangente e il diametro è medio proporzionale fra la segante e la sua parte esterna.*

Siano A, B, C (fig. 5^a) tre punti d'una parabola, BD' la direzione di un diametro, che incontra dunque la conica nel suo punto all'infinito D , cosicchè $ABCD$ è un quadrilatero inscritto: per un corollario al teorema di PASCAL, ossia che *se un quadrilatero è inscritto in una conica le due coppie di lati opposti e le tangenti in due vertici opposti si tagliano in punti che sono nella stessa retta*, potremo concludere che tirando per A e C le parallele a BD' e trovando i loro punti d'intersezione E, F , rispettivamente, con CB, AB ed immaginando per B la tangente BG alla parabola, i punti E, F saranno allineati col punto in cui questa tangente incontra la retta all'infinito, e col punto d'intersezione delle tangenti in A e C ; onde EF è parallela a BG . E se D', G sono i punti in cui il diametro e la tangente per B incontrano AC, CF , si avrà per conseguenza

$$CB : CE = CG : CF = CD' : CA,$$

onde GD' sarà parallela ad AF .

Posto ciò prolunghinsi BG, CA finchè s'incontrino in H , sarà:
 $BH : GH = AH : D'H = D'H : CH$ e perciò

$$D'H^2 = AH \cdot CH \quad \text{c. d. d.}$$

Ed ora passiamo a considerare il problema proposto.

Siano a, b, c (fig. 6^a) le tre tangenti date, A un punto pel quale deve passare la parabola, M, N i punti d'intersezione di a e b, b e c . Per M si tiri una parallela a c e per N una parallela ad a , le quali s'incontrano in O , sarà O un punto del diametro della parabola che passa pel punto di contatto di b con la curva (*). Così condotta AO e prolungata fino ad incontrare la tangente b in R , pel lemma precedente, si avrà un altro punto B della curva servendosi della relazione $RB = \frac{RO^2}{RA}$ e portando il segmento RB su RA nella direzione RA .

(*) Le rette a, b, c e la retta all'infinito formano un quadrilatero circoscritto alla parabola, le cui diagonali sono MO, NO , sicchè per un noto teorema O , il punto di contatto di b e quello della retta all'infinito sono per diritto.

Per trovare i punti di contatto delle tangenti colla parabola, sia D il punto in cui la corda AB taglia a e si determini quel punto E pel quale si ha

$$\overline{DE}^2 = DB \cdot DA,$$

E sarà un punto del diametro passante pel punto di contatto della tangente a . Condotta poi per Q , intersezione di a e c , una parallela a b , che incontra OM in I , sarà IE il diametro stesso e il punto G , in cui IE incontra a , il punto di contatto di a . Per avere poi i punti di contatto di b e c colla parabola basta: 1° tirare per O una parallela ad IG fino ad incontrare b in L , 2° trovare il punto P d'intersezione di ON con IQ , quindi tracciare PH parallela ad IE fino ad incontrare la tangente c in H .

Dopo ciò il problema può considerarsi completamente risoluto.

Discussione. In primo luogo è opportuno dimostrare che, colla costruzione indicata per trovare un secondo punto B della curva, B viene a cadere, com'è necessario, sempre nell'interno dell'angolo formato da a e c . Si ha infatti evidentemente dalla figura $RC : RO > RA : RO$, ma $RC : RO = RN : RM = RO : RD$ e d'altra parte $RA : RO = RO : RB$, onde

$$RO : RD > RO : RB$$

sicchè il punto d'intersezione di AO con a , cade fra B ed R .

In secondo luogo si osservi che oltre E esiste sulla AB un secondo punto E'' avente da D , distanza uguale a DE , pel quale si possono ripetere i ragionamenti fatti per E e che conduce alla determinazione di altri punti di contatto di a , b , c colla parabola. Il problema proposto ha perciò due soluzioni, tutte le volte che A non è punto di una tangente.

Osservazione. — È utile osservare che il diametro della parabola passante per Q taglia per metà la corda GH ed incontra quindi nel punto medio K anche il segmento EF determinato su AB dalla intersezione dei diametri IE , PH , ciò che condurrebbe ad un'altra soluzione del problema.

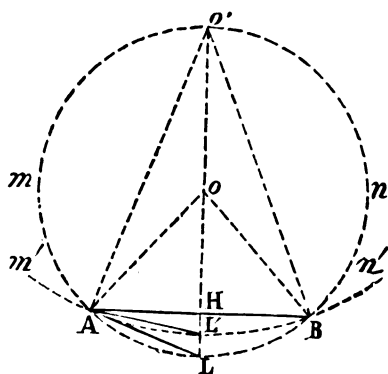
A. LUGLI.

UNA DIMOSTRAZIONE DI CORSO

INTORNO AI NOTI PROBLEMI SUI POLIGONI REGOLARI

I noti problemi della geometria elementare intorno ai poligoni regolari, per la determinazione di π , si possono far dipendere, in modo assai semplice e didatticamente utile, dal seguente:

« Dati il raggio R e l'apotema r di un poligono regolare di n lati uguali ad $AB = a$, calcolare il raggio R' e l'apotema r' del poligono regolare di numero doppio di lati parimente costruito « sopra AB ».



Basta per ciò considerare il triangolo isoscele OAB , i cui lati $OA = OB = R$ e la cui altezza $OH = r$ ne sono rispettivamente il raggio e l'apotema e tracciare indi la circonferenza $mABn$ e il suo diametro per H : l'angolo inscritto $A'O'B$ essendo metà di quello AOB saranno $O'A = R'$ ed $O'H = r'$ gli elementi cercati, e si avrà

$$r' = R + r \quad \text{ed} \quad R' = \sqrt{2R \cdot r'} = \sqrt{2R(R + r)}$$

e chiamando R_1 ed r_1 il raggio e l'apotema del poligono regolare isoperimetro al dato di numero doppio di lati costruito sopra AH , sarà

$$r_1 = \frac{1}{2} r' = \frac{R + r}{2} \quad \text{ed} \quad R_1 = \sqrt{R \cdot r_1} \dots [1]$$

Ed è anche qui facile il mostrare la nota relazione $R_k - r_k < \frac{1}{4}(R_{k-1} - r_{k-1})$ tra le differenze del raggio coll'apotema in due poligoni isoperimetri consecutivi: infatti essendo AL' bisettrice del-

l'angolo A nel triangolo $H A L$ sarà $H L' < \frac{1}{2} H L$ cioè $R' - r' < \frac{1}{2} (R - r)$, epperò

$$R_1 - r_1 < \frac{1}{4} (R - r).$$

Ora il problema: « Dato il lato $A B = a$ di un poligono regolare « ed il raggio $O A = R$ del cerchio circoscritto, calcolare il lato « $A L = c$ del poligono regolare di un numero doppio di lati, in « scritto nello stesso cerchio » si risolve subito mediante la proporzione

$$c : a = R : R' \text{ d'onde } c = \frac{a R}{R'} = \frac{a R}{\sqrt{2 R (R + r)}} \text{ e } c^2 = \frac{a^2 R^2}{2 R (R + r)}$$

e ponendo per a^2 il suo valore $4 (R^2 - r^2)$ si avrà

$$c^2 = 2 R (R - r) = 2 R \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} \right).$$

Eguualmente facile è la soluzione dell'altro problema: « Dati i « perimetri p, P di due poligoni regolari simili inscritto e circo- « scritto ad uno stesso cerchio, calcolare i perimetri p', P' dei poli- « goni regolari inscritto e circoscritto di un numero doppio di lati ».

Infatti considerando $A B$ come lato del poligono regolare di $2n$ lati circoscritto al cerchio di raggio $O' H = R + r$, il lato x del poligono simile circoscritto al cerchio di raggio R sarà dato dalla proporzione $x : a = R : R + r$, d'onde $x = \frac{a R}{R + r}$.

Analogamente il lato y del poligono regolare di n lati, eguali ad $A B = a$, circoscritto al cerchio di raggio R è dato dalla proporzione $y : a = R : r$, d'onde $y = \frac{a R}{r}$; sicchè gli anzidetti perimetri p, P, p', P' potranno così esprimersi

$$p = n a; P = \frac{n a R}{r}; p' = \frac{2 n a R}{\sqrt{2 R (R + r)}}; P' = \frac{2 n a R}{R + r}$$

e si avrà, com'è ovvio,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{P} = \frac{R + r}{n a R}; \quad \frac{1}{p'} = \frac{R + r}{2 n a R},$$

d'onde

$$\frac{1}{P'} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{P} \right) \quad \text{ossia} \quad P' = \frac{2 P p}{P + p} \dots \dots [2]$$

Inoltre

$$p' : p = \frac{2 R}{\sqrt{2 R (R + r)}} = \frac{\sqrt{2 R (R + r)}}{R + r} = \frac{P'}{p'};$$

d'onde

$$p' = \sqrt{p \cdot P'} \dots \dots \dots [3]$$

e, com'è risaputo, le formule [1], [2] e [3] risolvono il problema proposto.

Palermo, giugno 1890.

Ing. F. P. PATERNÒ.

ALCUNI TEMI DI MATEMATICA

PROPOSTI PER LA LICENZA LICEALE

1. Per un punto assegnato condurre una retta la quale seghi un cerchio dato in punti tali che la somma delle loro distanze da una retta data sia uguale ad un segmento dato.

2. Se due cerchi si segano, formando un angolo di 75° , e la distanza dei loro centri è doppia dell'apotema del dodecagono regolare inscritto nel minore di essi, dimostrare che la corda comune a questi due cerchi è lato dell'esagono regolare inscritto nel cerchio maggiore ed è lato del quadrato inscritto nel cerchio minore.

3. Supposto che le lettere dell'alfabeto italiano abbiano rispettivamente per valori i numeri che indicano l'ordine con cui si seguono, si determini un nome (a noi tutti caro) sapendo che esso è composto di sei lettere e che i valori numerici di queste adempiono alle seguenti condizioni:

la somma dei valori della terza e della sesta è uguale a 19;

la somma dei valori della seconda e della quinta è uguale a 10;

la somma dei quadrati dei valori delle quattro predette lettere è uguale a 407;

i valori della quinta, della sesta e della terza hanno per quarto proporzionale il doppio del valore della seconda;

di questi quattro valori il maggiore è quello della terza e poi segue quello della quinta;

i valori delle altre due lettere sono dati dalle radici reali dell'equazione

$$x^2 - 18x - 3\sqrt{x^2 - 30x + 228} = 12x - 230,$$

la minore delle quali esprime il valore della prima lettera.

NB. Dall'alfabeto vanno escluse le lettere *k, j, x, y, w*.

4. Di due coni circolari retti aventi il lato eguale, il vertice di comune ed i piani delle basi paralleli, son date: la somma $2a$ del raggio di uno di questi coni colla sua altezza; la somma $2b$ del raggio e dell'altezza dell'altro cono; e la somma $2S$ delle aree dei triangoli che si ottengono segnando i due coni con un piano passante per i loro centri. — Il primo dei nominati coni ha il raggio minore dell'altezza; ed il secondo ha invece il raggio maggiore dell'altezza.

Determinare i volumi di questi due coni.

(Sessione di luglio, 1890 — *R. Liceo di Bari*).

1. Essendo ABC' , ACB' , BCA' tre triangoli equilateri, costruiti sui lati del triangolo qualunque ABC dalla parte esterna di esso, si dimostri che i segmenti AA' , BB' , CC' sono fra loro uguali e passano per uno stesso punto.

2. Costruire un triangolo di cui son dati il perimetro, un angolo ed un'altezza. Si prenda in esame ciascuno dei casi che può presentare questo problema.

3. S_n , S_{n-1} , S_{n-2} denotando rispettivamente le somme delle potenze n^{esimo} , $(n-1)^{\text{esimo}}$ ed $(n-2)^{\text{esimo}}$ delle radici dell'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

dimostrare che si deve avere

$$aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0.$$

4. Facendo ruotare un triangolo rettangolo prima attorno alla ipotenusa e poi attorno ad un suo cateto si ottengono due solidi di cui i volumi sono rispettivamente espressi da $\frac{1}{3}\pi a^3$, $\frac{1}{3}\pi b^3$.

Determinare i tre lati di questo triangolo, e dimostrare quale di questi due volumi debba essere maggiore.

(Sessione d'ottobre, 1890 — *R. Liceo di Bari*).

1. Iscrivere in un triangolo un rettangolo del quale è dato il rapporto dei lati.

2. Le bisettrici degli angoli esterni di un quadrilatero qualunque formano un quadrilatero iscrittibile.

3. Dividere un cono con un piano parallelo alla base in modo che la superficie laterale del cono superiore sia media proporzionale fra la superficie laterale dell'intero cono e la superficie laterale del tronco di cono. (Risolvere questo problema algebricamente, supposto noti il raggio della base ed il lato del dato cono).

4. Un areonauta tira un colpo di fucile verso terra, dirigendo la canna dell'arma verticalmente. Supposta la velocità iniziale del proiettile di 300 m.; l'accelerazione $g = \text{m. } 9,809$ e la velocità del suono m. 340: si domanda a quale altezza dovrà trovarsi il pallone, perchè la palla giunga a terra contemporaneamente al rumore dell'esplosione.

(Sessione d'ottobre, 1890. *R. Liceo Ruggero Settimo di Caltanissetta*).

1. Condurre una retta in modo che i segmenti di essa, compresi in due cerchi dati, siano uguali rispettivamente a due segmenti determinati.

2. Descrivere con raggio dato una circonferenza che sia tangente ad un lato di un angolo, e tagli dall'altro un segmento dato.

3. Data l'area di un triangolo, determinare il valore dei tre lati del medesimo, nell'ipotesi che i lati siano proporzionali ai numeri m, n, p .

4. Calcolare il raggio di un circolo, essendo nota la differenza fra le aree del triangolo e dell'esagono regolari circoscritti al circolo.

(Sessione di luglio, 1890 - *R. Liceo e Ginnasio di Carmagnola*).

1. Da un punto preso fuori di un angolo condurre una retta la quale tagli i lati del medesimo in modo che i due segmenti di essa, compresi fra il punto ed i lati, siano proporzionali ai numeri interi m, n .

2. Trovare il luogo dei punti dai quali conducendo le due tangenti ad un cerchio, queste comprendono un angolo dato.

3. Scomporre in fattori di primo grado rispetto ad x , il polinomio $3x^3 - 3x^2\sqrt{a} + ax^2 - x\sqrt{a}^3$.

4. Calcolare il valore numerico del lato di un cono di rivoluzione nel caso in cui si conoscono il raggio della base, e la somma delle superficie laterali del cono e della piramide esagonale regolare iscritta nel medesimo.

(Sessione d'ottobre, 1890 - *R. Liceo e Ginnasio di Carmagnola*).

1. In una progressione aritmetica crescente la somma del diciannovesimo e del trentunesimo termine è 42 e il loro prodotto è 425. Trovare il primo termine e la ragione.

2. In un triangolo rettangolo la somma dell'ipotenusa e di un cateto è a ; quella dell'ipotenusa e dell'altro cateto è b . Calcolare i tre lati e l'area del triangolo.

3. Se si congiungono tra loro i punti di mezzo dei successivi lati di un quadrilatero convesso, e i punti di incontro delle congiungenti con le diagonali del quadrilatero si uniscono ancora fra loro, si ha un quadrilatero simile al dato ed equivalente alla quarta parte di esso.

4. Se si congiungono fra loro i vertici alterni di un esagono regolare, si ha un altro esagono regolare. I lati di questo nuovo esagono sono uguali al terzo delle rette che congiungono i vertici alterni del primo.

(Sessione di luglio, 1890 — *Liceo pareggiato di Chiavari*).

1. Costruire un triangolo rettangolo conoscendone l'ipotenusa e l'altezza.

2. Trovare tre numeri in progressione geometrica tali che la loro somma sia $13a$ e la somma dei loro quadrati sia $91a^2$.

(Sessione d'ottobre, 1890 — *R. Liceo di Cremona*).

1. Due piramidi sono eguali, se hanno eguali la base, l'altezza ed una delle facce laterali, purchè la posizione relativa di tali elementi sia precisamente la stessa.

2. La base di un triangolo isoscele è media proporzionale tra la sua proiezione sul lato ed il doppio di questo.

3. Di un trapezio isoscele sono date l'area, l'altezza e la lunghezza dei lati eguali: determinare le basi e le diagonali.

4. Il peso nell'acqua (distillata a 4°) di una massa contenente a Cg. di un certo metallo e b Cg. di un altro metallo è c , ed il peso nell'acqua di una massa contenente a' Cg. del primo metallo e b' Cg. del secondo metallo è c' : determinare il peso specifico di ciascuno dei due metalli.

(Sessione di luglio 1890 — *R. Liceo Ginnasiale Umberto I in Napoli*).

1. Un poligono convesso di numero pari di lati, se ha gli angoli opposti eguali, ha i lati opposti paralleli.

2. Se le tre facce laterali di un prisma triangolare hanno un angolo della stessa grandezza, il prisma deve essere retto.

3. Un parallelogrammo circoscrittibile ad un cerchio non può essere che rombo.

4. Determinare le quattro radici dell'equazione:

$$(x^2 - 11x + 24)^2 - 2(x^2 - 11x + 24) - 24 = 0.$$

5. Se l'area di un triangolo isoscele è terza parte del quadrato della base, il raggio del cerchio iscritto nel triangolo è la quarta parte della base.

Il candidato, se crede, può giovare del teorema: L'area di un triangolo è data dal prodotto del perimetro per la metà del raggio del cerchio iscritto.

(Sessione di ottobre 1890. *R. Liceo Ginnasiale Umberto I in Napoli*).

1. Descrivere un cerchio che sia tangente ad una retta data in un punto dato e che sia pure tangente ad una data circonferenza.

2. La circonferenza che passa per gli estremi d'un lato d'un triangolo isoscele e per un punto della base e quella passante per questo medesimo punto e per gli estremi dell'altro lato sono eguali tra loro; le minori di tali circonferenze passano per il baricentro della base ed hanno per diametro il lato del triangolo, quelle tangenti alla base sono maggiori di quelle che la tagliano, internamente, ed hanno per diametro il segmento che è terzo proporzionale dopo l'altezza ed il lato del triangolo isoscele.

3. La somma delle circonferenze di tre cerchi è $\alpha \cdot m$, la somma delle superfici dei cerchi stessi è $b \cdot m \cdot q$. e sono in progressione aritmetica i loro raggi: si domandano le lunghezze di questi.

4. Da un punto del primo lato d'un angolo acuto si conduce la perpendicolare sul secondo lato; dal piede di questa si conduce la perpendicolare sul primo lato, dal piede di questa la perpendicolare sul secondo lato, e si continua così indefinitamente; la somma delle infinite perpendicolari così condotte è $\alpha \cdot m$ ed è $b \cdot m$ la somma delle prime due: si domandano le lunghezze di queste.

(Sessione di ottobre 1890 — *Liceo V. E. di Palermo*).

1. Un numero N è il prodotto di tre numeri $(2x - 1)$, $(2x + 1)$, $(2x + 3)$; dividendolo per ciascuno di essi, e sommando i quoti, si ottiene 239. Calcolare il numero N .

2. Cercare due numeri tali, che 12 ne sia la differenza, e $\frac{5}{4}$ sia il rapporto fra il medio aritmetico ed il medio geometrico dei medesimi.

3. Il raggio del circolo circoscritto ed il raggio del circolo inscritto in un triangolo rettangolo, sono rispettivamente eguali a $m \cdot 7,5$ ed a $m \cdot 3$. Calcolare:

1. i tre lati; — 2. le proiezioni dei cateti sopra l'ipotenusa; —

3. l'altezza corrispondente all'ipotenusa; — 4. l'area; — 5. le mediane, le bisettrici degli angoli interni ed i segmenti che queste bisettrici determinano sui lati; — 6. gli angoli acuti; — 7. l'area della superficie laterale, l'area della superficie totale ed il volume del cono generato dal suddetto triangolo rettangolo in una rotazione intorno al cateto maggiore; — 8. l'area della superficie laterale, l'area della superficie totale ed il volume del tronco di cono che si ottiene, segnando il soprannominato cono con un piano parallelo alla base e distante un metro dal vertice; — 9. il volume e l'area della superficie della sfera il cui raggio sia eguale al raggio del circolo inscritto nel triangolo isoscele, il quale abbia la base doppia del cateto minore del surripetuto triangolo rettangolo e abbia gli altri due lati eguali ciascuno a 15 metri; — 10. l'area della superficie laterale, l'area della superficie totale ed il volume del cilindro il cui raggio ed altezza siano rispettivamente eguali al raggio ed al diametro della sfera di cui sopra.

4. I valori dei tre lati di un triangolo rettangolo sono rispettivamente eguali a tre numeri interi consecutivi.

Calcolare:

1. i tre lati; — 2. le proiezioni dei cateti sopra l'ipotenusa; — 3. l'altezza corrispondente all'ipotenusa; — 4. l'area; — 5. il raggio del circolo circoscritto, ed il raggio del circolo inscritto; — 6. le mediane, le bisettrici degli angoli interni del triangolo rettangolo, ed i segmenti che queste bisettrici determinano sui lati; — 7. gli angoli acuti; — 8. l'area della superficie laterale, l'area della superficie totale ed il volume del cono che si ottiene facendo ruotare il triangolo rettangolo in parola, attorno al cateto maggiore; — 9. l'area della superficie laterale, l'area della superficie totale ed il volume del tronco di cono, che si ottiene segnando il suaccennato cono con un piano parallelo alla base, e distante un metro dalla base; — 10. il volume e l'area della superficie della sfera, il cui raggio sia eguale al raggio del circolo inscritto nel triangolo isoscele, che abbia la base uguale al doppio del cateto minore del triangolo rettangolo in questione, e che abbia due lati eguali ciascuno all'ipotenusa; — 11. l'area della superficie laterale, l'area della superficie totale, ed il volume del cilindro, che abbia il raggio e l'altezza rispettivamente eguali al raggio ed al diametro della sfera suddetta.

(Sessione di luglio 1890. — *R. Liceo di Reggio Emilia*).



SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 64 e 65

64. Risolvere il seguente sistema d'equazioni:

$$ax^2 + by^2 + \alpha(ax - by) + (a+b)(1+\alpha-y)x - \\ (a+b)(1+\alpha)y + \alpha(a+b)(1+\alpha) = 0$$

$$2y^3 + \{x^2 + (a+b)^2 - 2y^2\}x - \{x^2 + (a+b)^2 - 2x^2\}y - 2x^3 = 0,$$

nelle quali α, a, b esprimono quantità note.

(S. GATTI).

Soluzione del Prof. P. Morino (*).

La prima equazione si può scrivere successivamente

$$ax^2 - (a+b)xy + by^2 + \{a\alpha + (a+b)(1+\alpha)\}x - \\ \{ \alpha b + (a+b)(1+\alpha) \}y + \alpha(a+b)(1+\alpha) = 0, \\ (x-y)(ax - by) + (a+b)(1+\alpha)(x-y+\alpha) + \alpha(ax - by) = 0, \\ (x-y+\alpha)\{ax - by + (a+b)(1+\alpha)\} = 0 \dots\dots [1]$$

La seconda equazione si può scrivere successivamente

$$2x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - 2y^3 + \{x^2 + (a+b)^2\}y - \{x^2 + (a+b)^2\}x = 0, \\ 2x^2(x-y) + 2y^2(x-y) - \{x^2 + (a+b)^2\}(x-y) = 0, \\ (x-y)\{2x^2 + 2y^2 - [x^2 + (a+b)^2]\} = 0 \dots\dots [2]$$

L'equazione [1] si scompone nelle seguenti:

$$x - y + \alpha = 0 \dots [3], \quad ax - by + (a+b)(1+\alpha) = 0 \dots [4]$$

e l'equazione [2] nelle:

$$x - y = 0 \dots [5], \quad 2x^2 + 2y^2 - [x^2 + (a+b)^2] = 0 \dots [6]$$

I sistemi risolvibili sono pertanto: [3], [5]; [3], [6]; [4], [5]; [4], [6].

Il primo sistema è incompatibile se α è differente da zero ed è indeterminato se $\alpha = 0$.

Dagli altri tre sistemi si ricavano cinque valori di x ed altrettanti di y .

Il sistema [3], [6] porge l'equazione

$$4x^2 + 4\alpha x + \alpha^2 = (a+b)^2$$

ossia

$$(2x + \alpha)^2 = (a+b)^2,$$

(*) Altre soluzioni sono state inviate dai sigg. Prof. R. Bettazzi, S. Catania, G. Russo, F. Viaggi.

da cui

$$x_1 = \frac{a+b-\alpha}{2}, \quad x_2 = -\frac{a+b+\alpha}{2}.$$

I valori corrispondenti di y sono

$$y_1 = \frac{a+b+\alpha}{2}, \quad y_2 = -\frac{a+b-\alpha}{2}.$$

Il sistema [4], [5] porge la soluzione

$$x_3 = y_3 = \frac{(a+b)(1+\alpha)}{b-a}$$

Dal sistema [4], [6] si ha l'equazione

$$2(a^2 + b^2)x^2 + 4a(a+b)(1+\alpha)x + (a+b)^2\{2(1+\alpha)^2 - b^2\} - \alpha^2 b^2 = 0$$

da cui si ricavano gli altri due valori x_4, x_5 di x . Sostituendo i medesimi successivamente nella [4] si ottengono i valori corrispondenti di y .

Le radici x_4, x_5 sono reali quando è soddisfatta la condizione

$$\frac{(a+b)^2 + \alpha^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2(1+\alpha)^2}{a^2 + b^2} \dots \dots \dots [7]$$

Le radici x_1, x_2 sono sempre reali per tutti i valori delle quantità a, b, α e diventano eguali nell'ipotesi di $a+b=0$; in tal caso si ha

$$x_3 = y_3 = 0; \quad x_4 = -\frac{\alpha}{2}, \quad y_4 = \frac{\alpha}{2}; \quad x_5 = \frac{\alpha}{2}, \quad y_5 = -\frac{\alpha}{2}.$$

Se $a=b$, si ha $x_1 = y_3 = \infty$ e la [7] diventa

$$\frac{4a^2 + \alpha^2}{2} \geq \frac{4a^2(1+\alpha)^2}{2a^2},$$

o più semplicemente

$$-3\alpha^2 - 8\alpha + 4(a^2 - 1) \geq 0.$$

Quest'ineguaglianza è soddisfatta per tutti i valori di α compresi nell'intervallo

$$-\frac{4+2\sqrt{1+3a^2}}{3}, \quad \frac{-4+2\sqrt{1+3a^2}}{3}$$

non esclusi questi stessi valori, nel quale caso speciale le radici x_4, x_5 sono reali ed eguali. Nel caso in cui sia $1+\alpha=0$, le radici x_4, x_5 sono sempre reali, eguali in valore assoluto e di segni contrarii.

65. *Fra tutti i triangoli sferici che hanno un angolo di 90° il lato ad esso opposto costante, e gli altri due lati minori di 90° , qual è quello di massima area?*
(D. Besso).

Soluzione del Prof. F. Viaggi.

Il problema si riconduce a trovare quando la somma degli angoli diventa massima.

Nel triangolo ABC sia $C = 90^\circ$, c costante, a e b minori 90° , e quindi, per noto teorema, acuti anche A e B .

Una delle formole di DELAMBRE è

$$\operatorname{sen} \frac{A+B}{2} = \frac{\cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \cos \frac{a-b}{2}.$$

Essendo $\frac{A+B}{2}$ acuto, al massimo o minimo di $\frac{A+B}{2}$ corrisponde il massimo o minimo del suo seno, e reciprocamente; e badando al secondo membro si ha massimo quando è $a = b$: ossia il triangolo assume area massima quando è isoscele.

Direttamente o come corollario del teorema precedente si dimostra che: « se l'ipotenusa d'un triangolo sferico rettangolo è costante e gli altri due lati « ottusi; quando questi diventano eguali, il triangolo assume lo stato di minimo. »

E come proposizioni correlative: « se un lato di un triangolo sferico è di « 90° , l'angolo opposto costante e gli altri due angoli minori (maggiori) di 90° , « il perimetro è massimo (minimo) quando il triangolo è isoscele. »

Soluzione del Prof. S. Catania.

Siano a, b, c i lati del triangolo sferico, e sia a quello opposto all'angolo di 90° . L'equazione

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} S = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} b \operatorname{sen} \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2} a}$$

fornisce per S un arco espresso in gradi, che ridotto in parti del raggio uguale ad uno, e moltiplicato per il quadrato del raggio della sfera, darà l'area del triangolo sferico rettangolo di cateti b e c e d'ipotenusa a , descritto sulla sfera stessa (Si veggia TURNER, *Trigonometria sferica*). Inoltre, essendo b e c minori di 90° , il lato a sarà minore di 90° , onde il massimo dell'area del triangolo è minore dell'ottava parte dell'area della superficie della sfera, e si deduce che $S < 90^\circ$, e che quindi il massimo di $\operatorname{sen} \frac{1}{2} S$ darà il massimo di S che corrisponderà al massimo dell'area del triangolo.

Si tratta adunque di trovare il massimo di $\operatorname{sen} \frac{1}{2} b \operatorname{sen} \frac{1}{2} c$, ovvero di $\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} b \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c$, poichè $\cos \frac{1}{2} a$ è costante.

Intanto si ha

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} b \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c = \frac{1 - \cos b - \cos c + \cos b \cos c}{4}$$

e $\cos a = \cos b \cos c$;

eliminando $\cos c$ si ottiene

$$\frac{1 + \cos a}{4} = \frac{\cos^2 b + \cos a}{4 \cos b}$$

e la quistione è ridotta a trovare il minimo di $\frac{\cos^2 b + \cos a}{4 \cos b}$. Questa funzione trattata coi metodi elementari noti dà $\frac{1}{2} \sqrt{\cos a}$ per suo valore minimo. Allora $\cos b = \sqrt{\cos a} = \cos c$, e il triangolo di massima area richiesto è il triangolo sferico rettangolo isoscele.

Osservazione. — Il luogo dei vertici degli angoli retti di tutti i triangoli sferici di cui parla il problema è una curva gobba che risulta segando la sfera con il cono quadrico che ha il vertice nel centro della sfera, e che è generato dalla retta comune a due piani corrispondenti dei due fasci di piani ortogonali proiettivi che hanno per assi i raggi della sfera che passano per i termini del lato fisso di quei triangoli sferici. Questa curva, che è una delle due parti della curva gobba di 4° ordine secondo cui quel cono taglia la sfera, non può mai ridursi ad un cerchio, come è facile verificare segando il detto cono con il piano tangente alla sfera nel punto di mezzo del lato a , e si ottiene per sezione una ellisse di semiasse $\operatorname{tg} \frac{1}{2} a$ e $\sqrt{\frac{1 - \cos a}{2 \cos a}}$, che sono soltanto eguali per $a = 0$.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

75. Dimostrare che, se ciascun lato d'un triangolo sferico viene diviso in due segmenti in modo che il prodotto dei coseni di tre segmenti non consecutivi sia eguale al prodotto dei coseni degli altri tre, i cerchi massimi perpendicolari ai tre lati condotti pei rispettivi punti di divisione passano per gli estremi d'uno stesso diametro.

76. Dimostrare che, se in un esagono convesso equilatero sono eguali fra loro le congiungenti le coppie di vertici opposti, queste congiungenti devono passare per uno stesso punto.

D. BESSO.

77*. Dare un metodo per la risoluzione del sistema d'equazioni:

$$A x^2 + B x y + A y^2 + D x + D y + E = 0$$

$$A_1 x^2 + B_1 x y + A_1 y^2 + D_1 x + D_1 y + E_1 = 0.$$

78*. Dimostrare la regola: un numero è divisibile per 17 se lo è la somma algebrica dei prodotti che si formano scomponendo, comin-

(*) Il tempo utile per l'invio delle soluzioni delle quistioni nuove e di quelle rimaste insolute scade un mese e mezzo dopo la chiusura della redazione del fascicolo. La data di chiusura si troverà nell'ultima pagina di ciascun numero del Periodico.

Le quistioni contrassegnate con asterisco sono esclusivamente indirizzate agli alunni delle nostre scuole.